الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى

الجامعة المفتوحة

ملخص محاضرات مادة : بحوث العمليات

إعداد :

أ/ ناصر ميلاد لطيوق

العام الدراسي 2007/2006ف

مفهوم وأهمية علم بحوث العمليات:

لقد ظهر هذا العلم حديثاً فأُعطيت له العديد من الأسماء مثل (بحوث العمليات أو الطرق الكمية في الإدارة، أو علم الإدارة، أو تحليل النظم) كل هذه الأسماء تطلق على هذا العلم بعد الحرب العالمية الثانية والمستخدمة في المجال المدني، وقد عرف علم بحوث العمليات على النحو التالي:

"هي إحدى الأدوات الكمية التي تساعد الإدارة في عملية اتخاذ القرارات" كما عرف بأنه "استخدام التحليل الكمي لمساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات مع الاعتماد بالدرجة الأولى على أساليب الرياضة المتقدمة" كما عرف بأنه "استخدام الطرق والأساليب والأدوات العلمية لحل المشاكل التي تتعلق بالعمليات الخاصة بأي نظام يفرض تقديم الحل الأمثل لهذه المشاكل للقائمين على إدارة هذا النظام".

كما أنه عرف على أساس أنه "مجموعة من الأدوات القياسية التي تمكن الإدارة من الوصول إلى قرارات أكثر دقة وموضوعية وذلك بتقديم الأساس الكمي لتحليل البيانات والمعلومات".

ومن خلال ما ذكر أعلاه فإن علم بحوث العلميات هو ذلك العلم الذي يهتم بدراسة مشكلة معينة من المشاكل.

استخدم هذا العلم في مجالات الإنتاج والتصنيع وتوزيع المواد ونقلها ومتابعة المشاريع وإيجاد الخطط الفعالة في تنفيذ المشروع بفترة زمنية أقل وبعدد أقل من العمال.

هذا العلم يوفر فوائد لصانعي ومتخذي القرار ومن بين هذه الفوائد:

1- طرح البدائل لحل مشكلة معينة لاتخاذ القرار المناسب مع الأخذ في الاعتبار العوامل والظروف المتوفرة.
2- إعطاء صورة تأثير العالم الخارجي على الاستراتيجية المتبعة في تنفيذ الخطة.
3- صياغة الأهداف والنتائج ومدى تأثير هذه الأهداف بكافة العوامل والمتغيرات رياضياً للوصول إلى كميات رقمية يسهل تحليلها.

<u>أهم المجالات التي يمكن استخدامها فيه كالآتي:</u>

1- في المجالات الإدارية حيث يوفر المعلومات اللازمة لاتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب.
2- في مجال الإنتاج والتصنيع والبيع وبأقل كلفة ممكنة وأقل فاقد ممكن في الإنتاج وتحقيق أكبر عائد من الأرباح.
3- في مجال التوزيع والنقل وبأقل تكلفة.

4- في مجال التعيين وذلك باختيار الشخص المناسب للوظيفة الملائمة له.
5- في مجال التخطيط من خلال متابعة المشاريع وإعداد الخطط الزمنية لتنفيذ المشاريع المختلفة.

أهم العوامل التي ساعدت في تطور بحوث العمليات:

1- لعل متابعة الباحثين والعلماء الذين عملوا في هذا المجال وفي اللجان التي شكلت من اجل الأغراض العسكرية إبان الحرب العالمية كان لهم دور في تطور هذا العلم من خلال (عقد الندوات-استغلال الوسائل العلمية، استخدام الطرق الحديثة في إيجاد الحل الأمثل).
2- ظهور الحاسوب والحاسبات الالكترونية وتطورها أدى إلى تطور علم بحوث العمليات والحصول على نتائج سريعة.
3- ظهور وتشكيل جمعيات ولجان متخصصة في بحوث العمليات.
4- ظهور المراكز البحثية المتخصصة.

البرمجة الخطية Linear Programming

البرمجة الخطية: "هي إحدى الأساليب التي تستخدم في علم بحوث العمليات وهـــي طريقـــة رياضية تمكن من التوصل لأفضل أو أمثل الحلول الممكنة لمجموعة من المشاكل التي تتوافر فيها شروط رياضية معينة".

فوائد البرمجة الخطية:

1- المساعدة على تحليل المشاكل التي تتميز بعدد كبير من المتغيرات والشروط.
2- تساعد البرمجة الخطية في إرغام الإدارة والمحللين على تحليل التكاليف والإيـــرادات لكل الموارد المتاحة ومعرفة المتغيرات المرتبطة بتلك الظواهر ومعرفة مدى التأثير على القرارات الإدارية المختلفة.

خلاصة القول أن البرمجة الخطية تستخدم في جميع المجالات المختلفـــة فـــي حالـــة تـــوافر المعلومات والبيانات المتفقة مع الشروط الأساسية لهذا النموذج.

الشروط الأساسية التي يجب توافرها عند استخدام أسلوب البرمجة الخطية:

1- يجب أن يكون هناك هدف محدد واضح وهذا الهدف إما أن يكون
أ- البحث عن أعلى ربح ممكن Max (z)
ب-البحث عن اقل تكلفة ممكنة Min (z)
2- يجب أن تعكس الصيغة الرياضية الهدف المراد تحقيقه بحيث تكون العلاقة الخطيـــة متجانسة من الدرجة الأولى وان يكون هناك بدائل مختلفة لتحقيق الهدف.
3- يجب أن تكون الموارد المتاحة للمشروع محدودة ويمكن استخدامها بطرق متعددة.
4- يجب أن تتوفر في المشكلة مجموعة من البدائل التي يمكن من خلالها الوصول إلـــى الهدف.
5- يجب أن تكون العلاقة بين الموارد المتاحة والمحدودة ومتغيرات الهدف المراد تحقيقه علاقات خطية متجانسة من الدرجة الأولى وقابلة للصياغة.
6- يجب أن تتوافر المقاييس والمعايير الكمية والدقيقة والمؤكدة لعناصر المشكلة.

هناك مجموعة من المصطلحات العامة يجب معرفتها عند استخدام البرمجة الخطية ومنها:-

1- القيمة العظمى (Maximization value): تعني بأن المشروع يبحث أو يسعى إلى تحقيق أعلى عائد أو ربح ممكن.

2- القيمة الصغرى (Minimization value): يعني بأن المشروع يبحث أو يسعى إلى تحقيق التكاليف إلى اقل ما يمكن تحقيقه.

3- منطقة الحلول الممكنة: تتحدد هذه المنطقة في مشكلة البرمجة الخطية علـــى أســـاس الناتج الصافي من جميع الشروط والمتغيرات الموجودة في الشكل والتـــي يجـــب أن يستوفيها أي حل نفرضه.

4- الحل الأمثل: هو الحل الذي نختاره من بين الحلـــول أو المقترحـــات أو البـــدائل أو الخطط التي يمكن وضعها بحيث يشترط أن يحقق بها الحل الأمثل للنموذج الرياضي للشروط الموضوعة للمسألة والهدف من حلها وقد يكون حلاً وحيداً قد تحصل علـــى أكثر من حل يحقق القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

الخطوات الأساسية التي يجب إتباعها عند تكوين مشكلة البرمجة الخطية:

1- تحديد طبيعة المشكلة (تحديد الهدف).

2- تحديد متغيرات التي تؤثر على هذه المشكلة.

3- تحديد دالة الهدف.

4- تحديد المقيدات أو القيود في المشكلة والتعبير عنها في شكل متباينات (اللا متساويات)

5- التكوين النهائي للمشكلة ويشمل التكوين النهائي:

* معادلة دالة الهدف (عظمى Max أو صغرى Min).

* مجموعة المعادلات الخطية المفروضة على المشكلة.

* شرط عدم السلبية.

6- استخدام إحدى الطرق أو أساليب البرمجة الخطية وهي:

* طريقة التحليل البياني (أسلوب التحليل البياني).

* طريقة السيمبلكس Simplex (أسلوب السيمبلكس).

تمرين عملي على البرمجة الخطية
"أسلوب التحليل البياني"

استخدام الأسلوب البياني في حل مشكلة التعظيم:

مثال (1):
دعنا نفترض أن إحدى شركات الأثاث قد قررت دخول صناعة الأثاث المكتبي يتم تصنيعه من الخشب وكان أمامها إما إنتاج المكاتب أو المقاعد أو كليهما والمشكلة التي تواجهها هي: اختيار مزيج من المنتجات يحقق لها أقصى أرباحاً ممكنة وقد قامت الشركة بعمل مجموعة عمل مكونة من رجال البيع والإنتاج وقاموا بوضع الصورة أمام الإدارة العليا على النحو التالي:

البيان	أنواع المنتجات	
	مكتب	مقعد
ربح الوحدة (بالدينار)	10	9
كمية الخشب اللازم "متر مربع"	5	4
ساعات العمل اللازمة للوحدة في المصنع	2	4

وقد اتضح أن إجمالي كمية الخشب المتاحة أسبوعياً للمصنع في حدود 120 متر مربع وأن المصنع يمكنه أن يعمل في حدود 60 ساعة في الأسبوع وأن الشركة يمكنها بيع كل الوحدات المنتجة من المكاتب والمقاعد.

المطلوب:

1- صياغة النموذج الرياضي لهذه المشكلة.
2- تحديد الكميات الواجب إنتاجها من كل سلعة وذلك في حدود كمية الخشب وساعات العمل المتاحة أسبوعياً بالشكل الذي يضمن تعظيم إجمالي الربح المحقق إلى أقصى حد ممكن باستخدام أسلوب التحليل البياني.
3- إيجاد عدد الساعات غير المستغلة وفي أية مرحلة إن وجدت.
4- ما هو القرار الأمثل الذي يجب اتخاذه إذا تغيرت أرباح السلعتين كأن يصبح يحقق ربحاً قدره 9 د.ل من المكاتب و 10 د.ل المقاعد.

الحــل:

نفرض أن عدد الوحدات الواجب إنتاجها من المكاتب = X

نفرض أن عدد الوحدات الواجب إنتاجها من المقاعد = y

إذن إجمالي الربح = الربح المحقق من السلعة الأولى + الربح المحقق من السلعة الثانية

أي أن دالة الهدف:-

تحقق أكبر عائد ممكن $MAX\ (Z) = 10X + 9y \rightarrow$

القيود:

(كمية الخشب للمكاتب + كمية الخشب للمقاعد) لا تزيد عن كمية الخشب.

(عدد ساعات العمل للمكاتب + عدد ساعات العمل للمقاعد) لا تزيد عن ساعات العمل.

$$5X + 4y \leq 120 \rightarrow (1)$$
$$2X + 4y \leq 60 \rightarrow (2)$$

شرط عدم السلبية $X, y \geq 0$

1- تحويل اللامتساويات إلى معادلات مكافئة وهي كالآتي:

معادلة رقم (1) $5X+4y=120$

معادلة رقم (2) $2X+4y=60$

$X, y \geq 0$

2- رسم الدوال وتمثيل القيود:

القيد الأول: $5X + 4y = 120$

نفرض أن x = صفر

بالتعويض عن قيمة x في القيد الأول

$$5(0) + 4y = 120$$
$$4y = 120$$
$$y = \frac{120}{4} = 30$$

y x
إذن عندما x = صفر فإن إحداثي (صفر، 30)
نفرض أن y = صفر
بالتعويض عن قيمة y في القيد الأول.

$5X + 4(0) = 120$
$5X = 120$
$x = \frac{120}{5} = 24$

y x
إذن عندما y = صفر فإن إحداثي (24، صفر)

القيد الثاني:

$2X + 4y = 60$

نفرض أن x = صفر

بالتعويض عن قيمة x في القيد الثاني

$2(0) + 4y = 60$
$4y = 60$
$Y = \frac{60}{4} = 15$

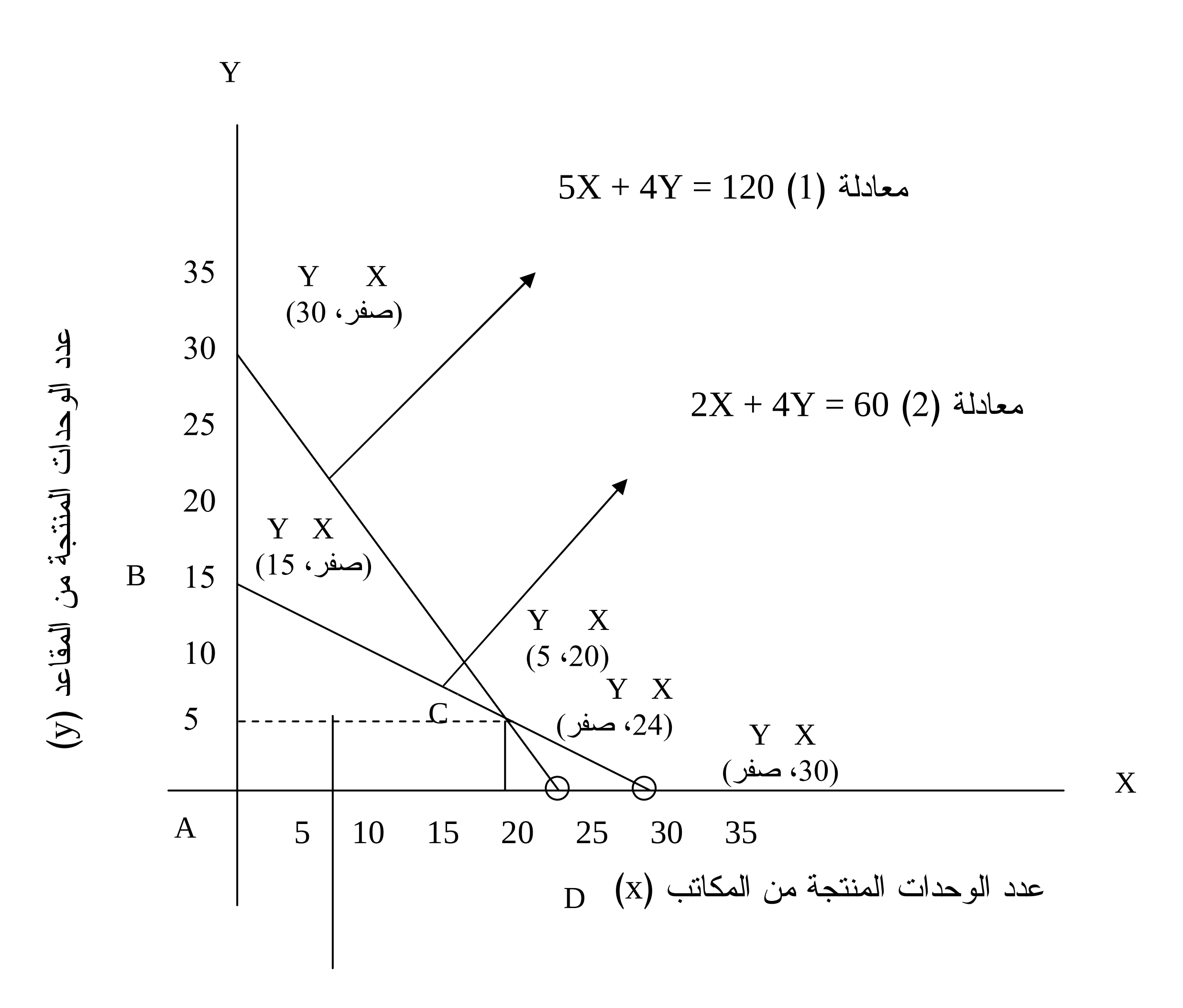
y X
إذن إحداثي النقطة (صفر، 15)
نفرض أن y = صفر وبالتعويض على قيمة y في معادلة القيد الثاني

$2X + 4(0) = 60$
$2X = 60$
$X = \frac{60}{2} = 30$

y X
إذن عندما y = صفر فإن إحداثي النقطة وهي (30، صفر)
وبالتالي فإن إحداثيات النقاط الآتي:

	X	y
القيد الأول	صفر	30
	24	صفر
القيد الثاني	صفر	15
	30	صفر

الشكل يوضح التحليل البياني
للمشكلة



كل النقاط الركنية معلومة عدا نقطة c غير معلومة وهذه النقطة يمكن إيجادها من خلال الرسم أو يمكن إيجادها رياضياً من طرح المعادلتين وبالتعويض عن قيمة المتغيران في إحدى المعادلات.

$$5X + 4y = 120 \rightarrow (1)$$
$$2X + 4y = 60 \rightarrow (2)$$

بالطرح $3X +$ صفر $= 60$

$$3X = 60$$
$$x = \frac{60}{3} = 20$$

بالتعويض عن قيمة x في المعادلة رقم 1 أو 2 لإيجاد قيمة y

$$5(20) + 4y = 120$$
$$100 + 4y = 120$$
$$4y = 120-100$$
$$4y = 20$$
$$y = \frac{20}{4} = 5$$

أو

$$2(20) + 4y = 60$$
$$40 + 4y = 60$$
$$4y = 60 - 40$$
$$4y = 20$$
$$y = \frac{20}{4} = 5$$

وبالتالي فإن إحداثي منطقة الحلول الممكنة والمحصورة بالمساحة (A B c D) كالآتي:

A = (صفر، صفر) منطقة المركز

B = (صفر، 15)

C = (20، 5) تم إيجادها من الرسم أو رياضياً

D = (24، صفر)

وعند هذه النقطة يمكن تقدير الأرباح المتوقعة عن كل هذه الحلول الركنية حسب الجدول التالي:

النقاط	إحداثيات منطقة الحلول الممكنة	دالة الهدف 10X + 9Y	قيمة دالة الهدف
A	(صفر، صفر)	10(0) + 9(0)	صفر
B	(صفر، 15)	10(0) + 9(15)	135
C	(20، 5)	10(20) + 9 (5)	245
D	(24، صفر)	10(24) + 9(0)	240

أكبر عائد ممكن ←

ويتضح من الجدول المذكور أعلاه أن الحل الأمثل هو في النقطة الركنية (c) (20، 5) ويعني ذلك أن x = 20 وحدة من إنتاج المكاتب و y = 5 وحدة من إنتاج المقاعد وهي التوليفة التي يحقق من خلالها ربحاً قدره 245 ديناراً أسبوعياً للشركة.

* إيجاد عدد الساعات غير المستغلة وفي أية قيد إن وجدت في هذه الحالة طالما إن أحسن وأفضل نقطة هي c والتي تحقق فيها الشركة أعلى عائد ممكن فإنه يتطلب الأمر التعويض في القيود التي تواجه الشركة وهي قيدي كمية الخشب والساعات المخصصة للإنتاج بقيم إحداثي نقطة c التي تم إيجادها من الرسم أو رياضياً حيث إنه حققت أكبر ربح ممكن حتى يمكن إيجاد الساعات وكمية الخشب المفقودة.

أولاً: قيد كمية الخشب.

$5X + 4y = 120 \rightarrow (1)$

$5(20) + 4(5) = 120$
$100 + 20 = 120$
$120 = 120$

وهذا يعني أن كمية الخشب كلها تم استغلالها أي لا يوجد فاقد عن هذه النقطة.

ثانياً: قيد ساعات العمل

$2X + 4y = 60 \rightarrow (1)$

$2(20) + 4(5) = 60$
$40 + 20 = 60$
$60 = 60$

وهذا يعني أن ساعات العمل كلها تم استغلالها أي بمعنى لا يوجد فاقد في الوقت المخصص للإنتاج أي تم استغلالها بالكامل.

* أما إذا تغيرت أرباح السلعتين بحيث أصبح سعر البيع بواقع 9 دنانير للمكاتب و 10 دنانير للمقاعد هذا يعني استبدال الأسعار وبالتالي سيترتب عليه التغير في الأرباح المحققة والجدول التالي يوضح ذلك.

النقاط	إحداثيات منطقة الحلول الممكنة	دالة الهدف Max(Z)=9x + 10y	قيمة دالة الهدف
A	(صفر، صفر)	Z=9(0) + 10(0)	صفر
B	(صفر، 15)	Z=9(0) + 10(15)	150
C	(20، 5)	Z=9(20) + 10 (5)	230
D	(24، صفر)	Z=9(24) + 10(0)	216

أكبر عائد ←

ومن هنا يتضح من الجدول بأنه في حالة تغير أرباح السلعتين يكون الحل الأمثل ما زال عند نقطة c وهي النقطة الركنية (20، 5) ولكي يحقق ربحاً قدره 230 دينار عليه إنتاج عدد (20) وحدة من المكاتب وعدد (5) وحدات من إنتاج المقاعد وهو الحل الأمثل وأية نقطة خارج هذه النقطة يحقق خسارة.

مثال (2):

إحدى الشركات المصنعة للأثاث قررت الدخول في صناعة الأثاث المكتبي والذي يتم تصنيعه من الخشب وكان أمامها إما إنتاج المكاتب أو المقاعد أو كليهما معاً والمشكلة التي تواجهها الشركة هي اختيار الربح السلعي الذي يحقق أقصى عائد يمكن ونتيجة لذلك حيث قدموا رجال البيع والإنتاج خطة للإدارة العليا وذلك على النحو التالي:

البيـــــــان	أنواع السلع	
	مكتب	مقعد
نوع الوحدة بالدينار	10 د.ل	9 د.ل
كمية الخشب اللازمة "بالمتر المربع"	5 $م^2$	4 $م^2$
ساعات العمل اللازمة (ساعة)	2	4

وقد اتضح أن إجمالي الخشب المتاح للشركة أسبوعياً في حدود 120 $م^2$ وأن الورشـــة التـــي تقوم بتصنيع المكاتب والمقاعد يمكن أن تعمل في حدود 60 ساعة أسبوعياً وان شركة يمكنها بيع جميع المكاتب والمقاعد والمطلوب:

1- صياغة النموذج الرياضي لهذه المشكلة.
2- تحديد الكميات الواجب إنتاجها من السلعتين في ظل كمية الخشب المتـــاح وســـاعات العمل اللازمة والذي يضمن تحقيق أقصى ربح ممكن.
3- إذا تغير أرباح السلعتين المكاتب بسعر (9) دينار والمقاعد بسعر 10 دينار فما هـــو العدد المطلوب والذي يمكن إنتاجه من السلعتين.

الحـــــل:

أولاً: تحديد طبيعة المشكلة (تحديد الهدف)

نجد أن القيمة تتعلق بالقيمة العظمى وهو البحث عن أعلى ربح ممكن وهي الكيفية التي يمكن الوصول بها إلى تحقيق الهدف أقصى عائد ممكن.

ثانياً: تحديد المتغيرات التي تؤثر على المشكلة وهي تتمثل في الطاقـــة المحـــدودة والمتاحـــة ومنطقة الإمكانيات وهذه المشكلة يوجد فيها (متغيران) وهما تحديد عدد الوحدات التي يمكـــن إنتاجها من المكاتب والمقاعد. وبالتالي فإنه يمكن أن نرمز إلى:

عدد الوحدات التي يمكن إنتاجها من المكاتب = x

عدد الوحدات التي يمكن إنتاجها من المقاعد = y

ثالثاً: تحديد دالة الهدف والتعبير عنها في صورة معادلة رياضية الهدف هو البحث عن كيفية تحقيق أعلى ربح ممكن وحيث إن سعر المكاتب 10 دنانير وسعر المقاعد 9 دنانير فإن دالـــة الهدف يمكن صياغتها كالآتي:

تحقيق أكبر عائد $\text{Max}(Z) = 10x + 9y \rightarrow$

رابعاً: تحديد القيود والتي تؤثر في المشكلة وشكل اللامتساويات

القيود أو المحددات

$$5x + 4y \leq 120 \rightarrow (1)$$
$$2x + 4y \leq 60 \rightarrow (2)$$
$$x, y \geq 0$$

خامساً: تحويل اللامتساويات إلى معادلات رياضية متجانسة من الدرجة الأولى:

$$5x + 4y = 120 \rightarrow (1)$$
$$2x + 4y = 60 \rightarrow (2)$$
$$x, y \geq 0$$

سادساً: تحليل القيود التي تواجه المشكلة:

القيد الأول: $5x + 4y = 120$

نفرض أن x = صفر

بالتعويض على قيمة x في القيد الأول

$$5(0) + 4y = 120$$
$$4y = 120$$
$$y = \frac{120}{4} = 30$$

x	y
صفر	30

(صفر، 30)

نفرض أن y = صفر

$5x + 4(0) = 120$

$5x = 120$

$x = \frac{120}{5} = 24$

y x

(24، صفر)

القيد الثاني:

$2x + 4y = 60$

نفرض أن x = صفر

$2(0) + 4y = 60$

$4y = 60$

$y = \frac{60}{4} = 15$

y x

(صفر، 15)

نفرض أن y = صفر

$2x + 4(0) = 60$

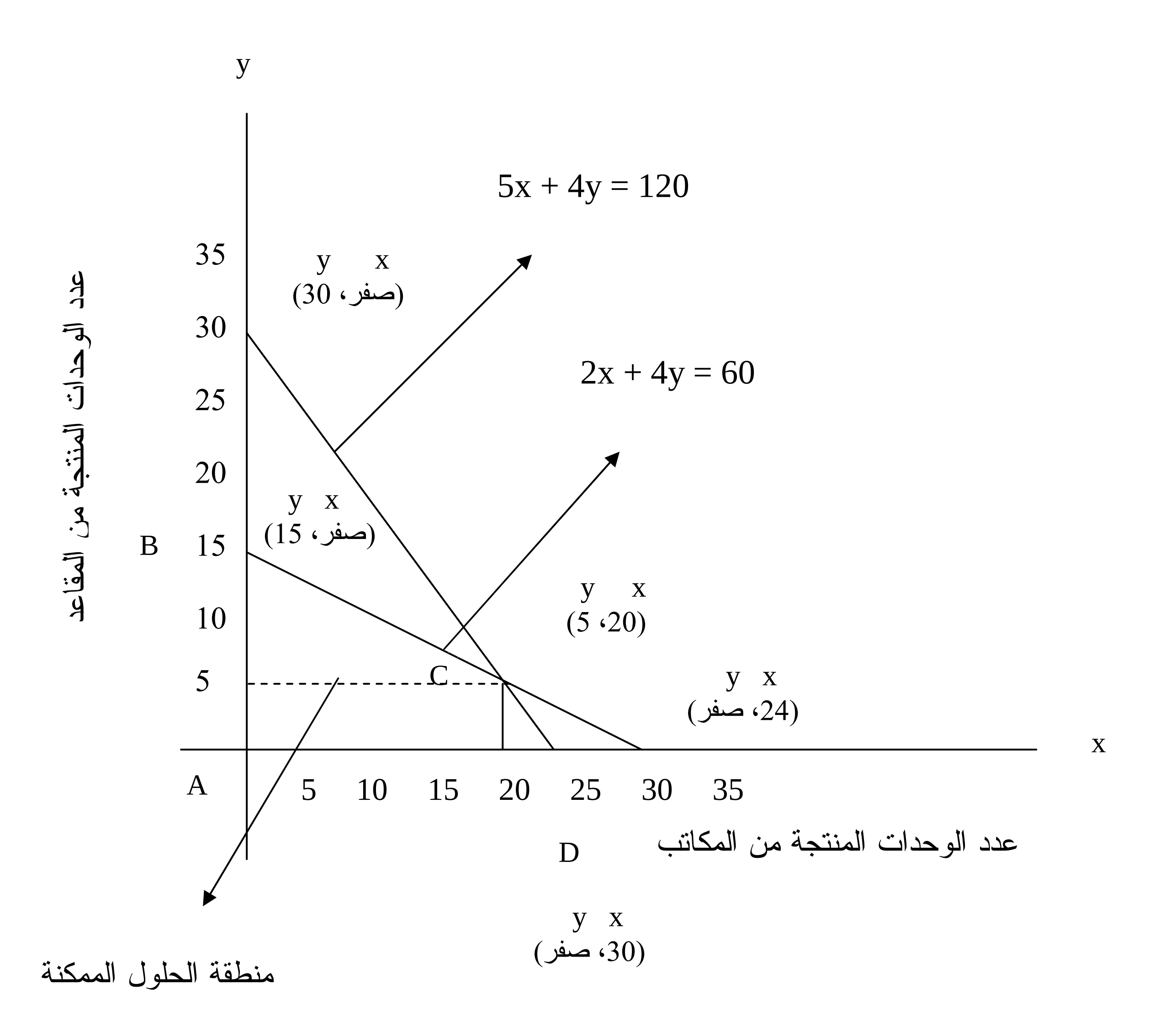
$2x = 60$

$x = \frac{60}{2} = 30$

y x

(30، صفر)

	x	y
القيد الأول	صفر	30
	24	صفر
القيد الثاني	صفر	15
	30	صفر



كل الإحداثيات معلومة عدا نقطة c غير معلومة ويمكن إيجادها من خلال إسقاط عمود على المحور (x) وتوصل النقطة c بالعمود y حتى يمكن إيجاد إحداثي النقطة c ويمكن إيجاد إحداثي c رياضياً كالآتي:

المعادلة رقم $5x + 4y = 120 \rightarrow (1)$

بالطرح $2x + 4y = 60 \rightarrow (2)$

$3x +$ صفر $= 60$

$3x = 60$

$x = \frac{60}{3} = 20$

بالتعويض في المعادلة رقم 1 أو 2 على قيمة x

$5(20) + 4y = 120$
$100 + 4y = 120$
$4y = 120-100$
$4y = 20$
$y = \frac{20}{4} = 5$

إذن في جميع النقاط التي تحدد منطقة الحلول الممكنة معلومة وهي كالآتي:

$2(20) + 4y = 60$
$40 + 4y = 60$
$4y = 60 – 40$
$4y = 20$
$y = \frac{20}{4} = 5$

حدود منطقة الحلول الممكنة (A B c D):

إحداثي النقطة A (صفر، صفر)

إحداثي النقطة B (صفر، 15)

إحداثي النقطة c (20، 5)

إحداثي النقطة D (24، صفر)

ومن خلال الجدول التالي يمكن إيضاح أفضل نقطة يمكن للشركة الإنتاج فيها وتحقيق أكبـــر عائد.

النقاط	إحداثيات منطقة الحلول الممكنة	دالة الهدف 10x + 9y	قيمة دالة الهدف
A	(صفر، صفر)	10(0) + 9(0)	صفر
B	(صفر، 15)	10(0) + 9(15)	135
C	(20، 5)	10(20) + 9 (5)	245
D	(24، صفر)	10(24) + 9(0)	240

أكبر عائد ممكن ← (245)

إذن أفضل إنتاج هو عند النقطة c والذي يحقق من خلالها إيراد أو أكبر عائد وقدره 245 دينار وبالتالي فإن هذا الإيراد يحقق له إنتاج 20 وحدة من إنتاج سلعة المكاتب وإنتاج (5) وحدات من إنتاج سلعة المقاعد.

إذا تغيرت أرباح السلعتين المكاتب بسعر 9 دنانير والمقاعد بسعر 10 دنانير فإن هذا سوف يغير في منطقة الحلول الممكنة وبالتالي يمكن صياغة الجدول السابق كالآتي:

النقاط	إحداثيات منطقة الحلول الممكنة	دالة الهدف $9x + 10y$	قيمة دالة الهدف
A	(صفر، صفر)	$Z=9(0) + 10(0)$	صفر
B	(صفر، 15)	$Z=9(0) + 10(15)$	150
C	(20، 5)	$Z=9(20) + 10 (5)$	230
D	(24، صفر)	$Z=9(24) + 10(0)$	216

أكبر عائد ←

وفي حالة تغير السعر فإن أفضل إنتاج هو عند نقطة c وهي تحقق أكبر عائد ممكن ويقدر بحوالي 230 هو إنتاج عدد (20) وحدة من المكاتب وإنتاج عدد (5) وحدات من إنتاج المقاعد.

تمرين عملي على البرمجة الخطية
"أسلوب التحليل البياني"

استخدام الأسلوب البياني في حل مشكلة تقليل التكاليف:

مثال (1):

في أحد الأقسام الداخلية، طلب من المسؤول عن التغذية أن يحدد المكونات الأساسية لوجبة الإفطار لطلبة القسم الداخلي وكان أمامه أن يضمن أن الوجبة تفي بالحد الأدنى اللازم من البروتين والفيتامين والحديد، وقد اتضح أنه يمكن تدبير هذه المتطلبات من نوعين من الغذاء والجدول التالي مدى توافر الاحتياجات الأساسية في هذين النوعين من الغذاء والحد الأدنى اللازم من كل منهما.

المستلـــــــزمات	الكميات المتوفرة في الغذائين		الحد الأدنى في الغذاء
	الغذاء الأول	الغذاء الثاني	
البروتين (وحدة)	2	2	10
الفيتامين (وحدة)	2	1	7
الحديد (وحدة)	$1\frac{1}{3}$	2	8

وكانت تكلفة الكيلوجرام الواحد من الغذاء الأول 3 دنانير وتكلفة الكيلوجرام الواحد من الغذاء الثاني 4 دنانير والمشكلة الآن هي تحديد الكميات اللازمة من كل الغذائين في الوجبة مع تقليل التكاليف إلى أقل حد ممكن باستخدام أسلوب التحليل البياني.

الحـــل:

نفرض أن x_1 = الوزن من الغذاء الأول في الوجبة

نفرض أن x_2 = الوزن من الغذاء الثاني في الوجبة

أي أن دالة الهدف = Min (z)

تحقق أقل كلفة ممكنة $\rightarrow$ $3x_1 + 4x_2$

القيود:

(كمية الخشب للمكاتب + كمية الخشب للمقاعد) لا تزيد عن كمية الخشب.

(عدد ساعات العمل للمكاتب + عدد ساعات العمل للمقاعد) لا تزيد عن ساعات العمل.

$$2x_1 + 2x_2 \geq 10 \rightarrow (1)$$
$$2x_1 + x_2 \geq 7 \rightarrow (2)$$
$$\frac{1}{3}1\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \rightarrow (3)$$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

تحويل اللامتساويات إلى معادلات متكافئة وهي كالآتي:

معادلة رقم (1) $2x_1 + 2x_2 = 10$

معادلة رقم (2) $2x_1 + x_2 = 7$

معادلة رقم (3) $\frac{1}{3}1\ x_1 + 2x_2 = 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

رسم القيود وحدود المنطقة الممكنة:

رسم القيد الأول: $2x_1 + 2x_2 = 10$

نفرض أن x_1 = صفر

بالتعويض عن قيمة x في القيد الأول

$$2(0) + 2x_2 = 10$$
$$2x_2 = 10$$
$$x_2 = \frac{10}{2} = 5$$

x_1 x_2

(5، صفر)

عند x_2 = صفر

بالتعويض

$$2x_1 + 2(0) = 10$$
$$2x_1 = 10$$
$$x_1 = \frac{10}{2} = 5$$

x_1 x_2

(صفر، 5)

رسم القيد الثاني:

$2x_1 + x_2 = 7$

عند x_1 = صفر

بالتعويض

$2(0) + x_2 = 7$

$x_2 = 7$

$x_1 \quad x_2$

(7، صفر)

عند x_2 = صفر

$2x_1 + x_2(0) = 7$

$2x_1 = 7$

$x_1 = \frac{7}{2} = 3.5$

$x_1 \quad x_2$

(صفر، 3.5)

رسم القيد الثالث:

$\frac{3}{4}x_1 + 2x_2 = 8$

عند x_1 = صفر

$\frac{3}{4}(0) + 2x_2 = 8$

$2x_2 = 8$

$x_2 = \frac{8}{2} = 4$

$x_1 \quad x_2$

(4، صفر)

عند x_2 = صفر

بالتعويض

$\frac{3}{4}x_1 + 2(0) = 8$

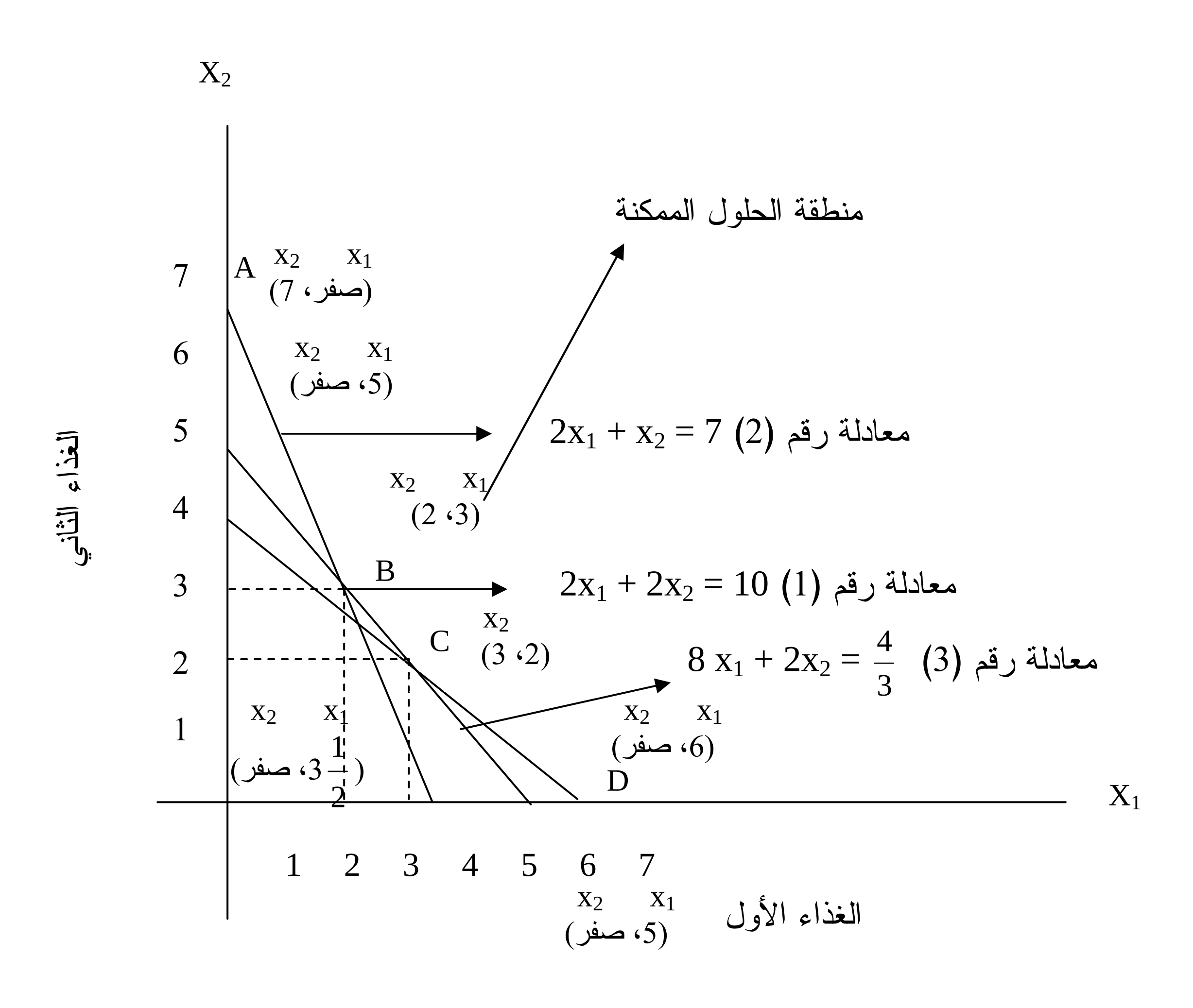
$\frac{3}{4}x_1 = 8$

$x_1 = \frac{8}{\frac{4}{3}} = 8x\frac{3}{4} = \frac{24}{4} = 6$

$x_1 \quad x_2$

(صفر، 6)

	x_1	x_2	
x_1 x_2	صفر	5	القيد الأول
(5 ،5)	5	صفر	
x_1 x_2	صفر	7	القيد الثاني
(3.5 ،7)	3.5	صفر	
x_1 x_2	صفر	4	القيد الثالث
(6 ،4)	6	صفر	



الشكل يوضح التحليل البياني للمشكلة

يمكن إيجاد منطقة الحلول الممكنة في المنطقة المحصورة وهي (A B C D) حيث إحـــداثي النقطة A معلومة والنقطة D معلومة وهي على التوالي:

A ← (صفر، 7)

B ← (6، صفر)

ويمكن إيجاد النقاط (B, C) بإسقاط عمود على المحور x1 والعمود x_2 من خلال الرسم أو إيجادهما من طرح معادلة المنحنيات.

ويمكن إيجاد النقطة B بطرح معادلة المنحنى رقم (1) من معادلة المنحنى رقم (2).

$$2x_1 + 2x_2 = 10 \rightarrow (1)$$
$$2x_1 + x_2 = 7 \rightarrow (2)$$

صفر + $x_2 = 3$

$$x_2 = 3$$

بالتعويض عن قيمة x_2 في المعادلة رقم 1 أو 2 لإيجاد قيمة y

$$2x_1 + 2(3) = 10$$
$$2x_1+6 = 10$$
$$2x_1 = 10-6$$
$$2x_1 = 4$$
$$\frac{4}{2}\ x_1 = = 2$$

x_2 x_1

إذن النقطة B ⇦ (2، 3)

ويمكن إيجاد النقطة C بنفس الطريقة وذلك بطرح المعادلة رقم (1) من المعادلة رقم (3)

$$2x_1 + 2x_2= 10 \rightarrow (1)$$
$$\frac{1}{3}1\ x_1 + 2x_2 = 8 \rightarrow (3)$$

$x_1\frac{2}{3}$ + صفر = 2

$$x_1\frac{2}{3} = 2$$

بقسمة طرفي المعادلة على $\frac{2}{3}$

$$\frac{\frac{2}{3}x_1}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{2\times 3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_1 = 3$$

بالتعويض عن قيمة x_1 في المعادلة رقم (1) و (3) لإيجاد x_2

$$\frac{3}{4}(3) + 2x_2 = 8$$

$$\frac{12}{3} + 2x_2 = 8$$

$$4 + 2x_2 = 8$$

$$2x_2 = 8 - 4$$

$$2x_2 = 4$$

$$x_2 = 4/2 = 2$$

x_2 x_1

إذن النقطة C ⇦ (3، 2)

وبالتالي فإن إحداثي منطقة الحلول الممكنة والمحصورة بالمساحة (A B C D) كالآتي:

إحداثي النقطة		x_2 x_1
A	=	(صفر، 7)
B	=	(2، 3)
C	=	(3، 2)
D	=	(6، صفر)

وعند هذه النقاط يمكن تقدير التكاليف المتوقعة عن كل الحلول الركنية حسب الجدول التالي:

النقاط	إحداثيات منطقة الحلول الممكنة (x_2, x_1)	دالة الهدف $Min\ (z)=3x_1 + 4x_2$	قيمة دالة الهدف
A	(صفر، 7)	Min(z)=3(0) + 4(7)	28
B	(2، 3)	Min(z)=3(2) + 4(3)	18
C	(3، 2)	Min(z)=3(3) + 4(2)	17 ← أدنى كلفة ممكنة
D	(6، صفر)	Min(z)=3(6) + 4(0)	18

ويتضح من الجدول السابق أن الحل الأمثل الذي يصل بتكاليف الوجبة إلى أدناها هو استخدام (3) كيلو جرام من الغذاء الأول و (2) كيلوجرام من الغذاء الثاني بتكلفة قدرها (17) دينـــار وهو أدنى تكلفة ممكنة.

تمرين عملي على البرمجة الخطية

"أسلوب السمبلكس"

Simplex method

استخدام أسلوب السمبلكس في حل مشكلة التعظيم:

مثال (1):

أوجد الحل الأمثل للنموذج أدناه باعتماد أسلوب simplex إذا كانت دالـــة الهـــدف والقيـــود المؤثرة في المشكلة على النحو التالي:

دالة الهدف ← $\max (z)= 10x + 30y$

تحقق أكبر عائد

القيود S.T Subject To:

$4x + 6y \le 12 \rightarrow (1)$

$8x + 4y \le 16 \rightarrow (2)$

شرط عدم السلبية x, y

الحل:

ضرورة تحويل اللامتساويات إلى معادلات رياضية متكافئة مع إضافة ما يسمى بـــالمتغيرات الإضافية إلى كل اللامتساويات مع تعديل دالة الهدف والتي تصبح كالآتي:

$4x + 6y = 12 \quad (1)$

$8x + 4y = 16 \quad (2)$

$\text{Max}(z) = 10x + 30y + 0S_1 + 0S_2$

تعديل القيود بإضافة المتغير العشوائي

$4x + 6y + S_1 + 0S_2 = 12 \quad (1)$

$8x + 4y + 0S_1 + S_2 = 16 \quad (2)$

$x, y, S_1, S_2 \geq$ صفر

إذن التكوين النهائي للمشكلة كالآتي:

دالة الهدف:

$$Max(z) = 10x + 30y + 0S_1 + 0S_2$$

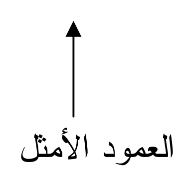
القيود:

$$4x + 6y + S_1 + 0S_2 = 12$$
$$8x + 4y + 0S_1 + S_2 = 16$$
$$x, y, S_1, S_2 \geq \text{صفر}$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & S_1 & S_2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

الجدول المبدئي

دالة الهدف Z			10	30	صفر	صفر	
ربح الوحدة	المتغير العشوائي	قيمة المتغير	x	y	S_1	S_2	
صفر	S_1	12	4	6	1	0	12/6 =2
صفر	S_2	16	8	4	0	1	16/4 =4
C		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	
Z — C			10	30	صفر	صفر	



الجدول الثاني لتحسين الحل

S_2	S_1	y	x	قيمة المتغير	المتغير العشوائي	ربح الوحدة
صفر	صفر	30	10	Z دالة الهدف		
S_2	S_1	y	x	قيمة المتغير	المتغير العشوائي	ربح الوحدة
صفر	1/6	1	2/3	2	y	30
صفر	−2/3	صفر	16/3	8	S_2	صفر
صفر	5	30	20	60	C	
صفر	−5	صفر	−10	Z — C		

يمكن إيجاد قيمة الصف من خلال قسمة قيم صف على نقطة الارتكاز

$$\frac{12 \;\;,\, 4 \;,\, 6 \;,1 \;,\, 0}{6}$$

إيجاد الصف S_2

قيمة عناصر الصف القديم – (قيم عناصر الصف الجديد × نقطة ارتكاز الصف القديم)

$16 - (4 \times 2) = 16 - 8 = 8$

$8 - (4 \times \frac{2}{3}) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{24-8}{3} = \frac{16}{3}$

$4 - (4 \times 1) = 4 - 4 =$ صفر

$0 - (4 \times \frac{1}{6}) = 0 - \frac{4}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

$1 - ($صفر $\times 4) = 1 -$ صفر $=$ صفر

ويتضح من الجدول السابق أنه الحل الأمثل حيث إن كل المؤشرات في الصف (Z-C) صفرية وسالبة وأن توليفه المثالي من الإنتاج موجودة في العمود (قيم المتغير) كما إن حصيلة الأرباح المثالية وهي الصف C والبالغ قيمة 60 وهو وحدتين من y والمتغير y هو المتغير الموجود في الحل.

كما يلاحظ بأن الطاقة المتاحة مستغلة بالكامل في المتغير العشوائي S_1 أما الطاقة المتاحة لم تستغل استغلالاً كلياً في المتغير العشوائي S_2 حيث يلفت في $S_2 = 8$ والتي يرمز له بالطاقة العاطلة.

مثال (2):

إذا كانت دالة الهدف للنموذج التالي:

تحقق أكبر عائد $\rightarrow$ $\max (z)= 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$

وكانت القيود على النحو التالي:

$$4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

أوجد الحل الأمثل لهذا النموذج باستخدام طريقة السيمبلكس في إيجاد الحل الأمثل.

الحل:

1- تحويل اللامتساويات إلى معادلات متكافئة مع تعديل دالة الهدف وذلك بإضـــافة المتغيـــر العشوائي $0S_3, 0S_2, 0S_1$

$$Max(z) = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

القيود

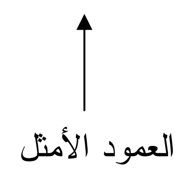
$$Max(z) = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 30$$
$$Max(z) = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 40$$
$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq$ صفر

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & S_1 & S_2 & S_3 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

الجدول المبدئي

Z دالة الهدف			4	3	6	0	0	0
ربح الوحدة	المتغير العشوائي	قيمة المتغير	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
صفر	S_1	40	3	1	3	1	0	0
صفر	S_2	30	2	2	3	0	1	0
C		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
Z - C			4	3	6	صفر	صفر	صفر

40/3=13.33
30/3=10



الجدول الثاني لتحسين الحل

Z دالة الهدف			4	3	6	0	0	0
ربح الوحدة	المتغير العشوائي	قيمة المتغير	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
6	x_1	10	2/3	2/3	1	صفر	1/6	صفر
صفر	S_1	10	1	−1	صفر	1	−1	صفر
C		60	4	4	6	0	2	0
Z — C			صفر	−1	صفر	0	−2	صفر

الصف الجديد

$$\frac{30 \ , 2 \ , 2 \ , 3 \ , 0 \ ,1 \ , 0}{3}$$

S_1 = قيمة عناصر الصف القديم – (قيم عناصر الصف الجديد × قيمة نقطة الارتكاز الصف القديم)

$10 = 30 - 40 = (3 \times 10) - 40$

$1 = 2 - 3 = (3 \times \frac{2}{3}) - 3$

$1- = 2 - 1 = (3 \times \frac{2}{3}) - 1$

صفر = 3 − 3 = (3 × 1) − 3

1 − (صفر × 3) = 1 − صفر = صفر

صفر − (صفر × 3) = صفر − 1 = −1

صفر − (صفر × 3) = صفر − صفر = صفر

ويتضح من الجدول الأخير أنه الحل الأمثل حيث إن كل عناصر قيم الصف (Z-C) كلها صفرية وسالبة وأن توليفه المثالي من الإنتاج موجودة في العمود (قيم المتغير) كما أن حصيلة الإنتاج المثالية في الصف C قيمتها 60 دينار وهو 10 درجات من (x_3) والمتغير x_3 هو المتغير الموجود في الحل.

كما أنه يلاحظ بأن الطاقة المتاحة مستغلة بالكامل في المتغير العشوائي S_1 أما الطاقة المتاحة لم تستغل استغلالاً كلياً في المتغير العشوائي S_2 حيث يلفت في المتغير ت العشوائي $S_2 = 10$ وهذا يطلق عليه بالطاقة العاطلة.

تمرين عملي على البرمجة الخطية
"أسلوب السمبلكس"
Simplex method

<u>استخدام أسلوب السمبلكس في حل مشكلة التقليل:</u>

مثال (1):

أوجد الحل الأمثل للنموذج أدناه باعتماد أسلوب simplex إذا كانت دالة الهدف

$\min(z) = 5x_1 + 7x_2 \rightarrow$ تحقيق أقل كلفة ممكنة

القيود

$$x_1 + 2x_2 = 50 \rightarrow (1)$$
$$x_1 \geq 20 \rightarrow (2)$$
$$x_2 \leq 20 \rightarrow (3)$$

هناك ملاحظة وهي في حالة ≤ يضاف متغير فائض ومتغير وهمي

في حالة ≥ يضاف متغير عطل فقط

في حالة = يضاف متغير وهمي فقط

وبالتالي تصبح الصياغة للنموذج الرياضي كالآتي:

$$\min(z) = 5x_1 + 7x_2$$

القيود:

$$X_1 + 2x_2 + D_1 = 50$$
$$X_1 + D_2 - S_1 = 20$$
$$X_2 + S_2 = 20$$
$x_1, x_2, D_1, D_2, S_1, S_2 \geq$ صفر

دالة الهدف:

$$\text{Min}(z) = 5x_1 + 7x_2 + 0S_1 + 0S_2 + M_1D_1 + M_2D_2$$

بالتالي تصبح القيود

$X_1+2x_2+0S_2+D_1+0D_2=50$
$X1+0x2-S_1+0S_2+0D_1+D_2=20$
$0X_1+x_2+0S_1+S_2+0D_1+0D_2=20$

$x_1, x_2, D_1, D_2, S_1, S_2 \geq$ صفر

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & D_1 & D_2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

OUT

IN

الجدول المبدئي:

Z دالة الهدف			5	7	صفر	صفر	M	M	
تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	x_1	x_2	S_1	S_2	D_1	D_2	
M	D_1	50	1	2	0	0	1	0	50/1=50
M	D_2	20	1	0	-1	0	0	1	20/1=20
صفر	S_2	20	0	1	0	1	0	0	20/0=0
C		70M	2M	2M	-M	0	M	M	
Z - C			5-2M	7-2M	M	صفر	صفر	صفر	

الصف المستبدل

أكبر قيمة سالبة   العمود الأمثل   النقاط الركنية

وإذا افترضنا أن قيمة M = 10 فإن X_1 تكون أكبر قيمة سالبة موجودة في الصـــف (Z-C) وبالتالي يكون العمود x_1 هو العمود الأمثل

IN

OUT

الجدول الثاني لتحسين الحل:

Z دالة الهدف			5	7	صفر	صفر	M	M	
تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	x_1	x_2	S_1	S_2	D_1	D_2	
5	x_1	20	1	0	−1	0	0	1	صفر=20/0
M	D_1	30	0	2	1	0	1	−1	30/2=15
صفر	S_2	20	0	1	0	1	0	0	20/1=20
C		30M+100	5	2M	M−5	صفر	M	5−M	
Z - C			صفر	7-2M	5−M	صفر	صفر	2M−5	

الصف المستبدل

-13

أكبر قيمة سالبة

العمود الأمثل

الصف الجديد

$$\frac{20 \quad ,1\,,0\,,-\,1\,,0\,,0\,,1}{1}$$

قيم عناصر الصف القديم − (قيم عناصر الصف الجديد × نقطة ارتكاز الصف القديم)

إيجاد الصف D_1

$30 = 20 - 50 = (1 \times 20) - 50$

$0 = 1 - 1 = (1 \times 1) - 1$

$2 = 0 - 2 = (1 \times 0) - 2$

$1 = 1 + 0 = (1 \times 1-) - 0$

$0 = 0 - 0 = (1 \times 0) - 0$

$1 = 0 - 1 = (1 \times 0) - 0$

$1- = 1 - 0 = (1 \times 1) - 0$

إيجاد الصف S_2

قيم عناصر الصف القديم – (قيم عناصر الصف الجديد × نقطة ارتكاز الصف القديم)

20 = 0 – 20 = (0 × 20) – 20

0 = 0 – 0 = (0 × 1) – 0

1 = 0 – 1 = (0 × 0) – 1

0 = 0 + 0 = (0 × 1–) – 0

1 = 0 – 1 = (0 × 0) – 1

0 = 0 – 0 = (0 × 0) – 0

0 = 0 – 0 = (0 × 1) – 0

جدول الحل النهائي:

Z دالة الهدف			5	7	0	0	M	M
تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	x_1	x_2	S_1	S_2	D_1	D_2
7 5 صفر	x_2 x_1 S_2	15 20 5	0 1 صفر	1 صفر صفر	$\frac{1}{2}$ 1 $-\frac{1}{2}$	0 صفر 1	$\frac{1}{2}$ صفر $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$
C		205	5	7	−1.5	صفر	3.5	1.5
Z - C			صفر	صفر	+1.5	صفر	$M-\frac{7}{2}$	$M-\frac{3}{2}$

إيجاد قيمة الصف المستبدل = $\dfrac{\text{قيم الصف المستبدل}}{\text{نقطة ارتكاز الصف المستبدل}}$

$$\frac{30\ ,0\,,2\,,1,0\,,1,-1}{2}$$

إيجاد قيم عناصر الصف x_1

قيم عناصر الصف القديم – (قيم عناصر الصف الجديد × نقطة ارتكاز الصف القديم)

$20 - (0 \times 15) = 20 -$ صفر $= 20$

$1 - (0 \times 0) = 1 -$ صفر $= 1$

$0 - (0 \times 1) = 0 - 0 =$ صفر

$-1 - (0 \times \frac{1}{2}) = -1 -$ صفر $= 0$

$0 - (0 \times 0) = 0 - 0 =$ صفر

$0 - (0 \times \frac{1}{2}) = 0 -$ صفر $=$ صفر

$1 - (0 \times -\frac{1}{2}) = 1 -$ صفر $= 1$

إيجاد قيم عناصر الصف S_2

قيم عناصر الصف القديم – (قيم عناصر الصف الجديد × نقطة ارتكاز الصف القديم)

$20 - (1 \times 15) = 20 - 15 = 5$

$0 - (1 \times 0) = 0 - 0 =$ صفر

$1 - (1 \times 1) = 1 - 1 =$ صفر

$0 - (1 \times \frac{1}{2}) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$1 - (1 \times 0) = 1 - 0 = 1$

$0 - (1 \times \frac{1}{2}) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$0 - (1 \times -\frac{1}{2}) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ومن هنا يتضح من الجدول الأخير أن جميع قيم الصف (Z-C) جميعها صفرية وموجبة وبالتالي فإن أقل كلفة ممكنه هي 205 لإنتاج عدد من الوحدات من $x_2 = 15$ و $x_1 = 20$

نموذج النقل Transportation Models

المقدمة:

مشكلة النقل هي عبارة عن حالة من حالات البرمجة الخطية وهذه المشاكل يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية وهذا النموذج يوفر الحل في أسرع وقت ممكن وأكثر فاعلية.

هناك بعض المشاكل لها خصائص ومواصفات تنفرد عن بقية المشاكل الخطية.

وتعتبر مشكلة (النموذج) النقل من الأساليب الرياضية المهمة والتي تساعد الإدارة في عملية اتخاذ القرار الملائم في نقل كمية من المواد (السلع) من مصادر (Sources) تصنيعها أو المخازن إلى مراكز متعددة (Destination) كالمخازن وذلك بما يجعل مجموع تكاليف هذا النقل أقل ما يمكن كما أنه يختصر مشكلة النقل بتوزيع الموارد البشرية والمادية بأفضل صورة على اعتبار أن هذه الموارد محددة دائماً ويمكن أن نلخص الوضع العام لمسألة النقل بالجدول التالي:-

مشاكل النقل Transportation Problem

يمكن أن نلخص الوضع العام لمسألة النقل بالجدول التالي:

مراكز التوزيع / المصادر	D_1	D_2	………..	D_n	Supply
Q_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	……….	C_{1n} x_{1n}	a_1
Q_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	……….	C_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	………. ………. ……….	………. ………. ……….	⋮
Q_n	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}	……….	C_{mm} x_{mm}	a_m
الطلبيات Demand	b_1	b_2	……….	b_n	

حيث $D_1, D_2……D_n$ هي مراكز التوزيع إلى (n) مركز

حيث $Q_1, Q_2……Q_n$ هي مراكز التصدير إلى (n) مركز

تكلفة النقل من المصدر الأول إلى المركز الأول C_{11}

تكلفة النقل من المصدر m إلى المركز n C_{mn}

عدد الوحدات المرسلة من المصدر الأول إلى المركز الأول x_{11}

الكميات المتاحة في المصدر هي $a_1, a_2……a_n$

الكميات المطلوبة في كل مركز هي $b_1, b_2….b_n$

مع الأخذ في الاعتبار القاعدة القانونية بشأن التوزيع المبدئي

$$m + n - 1$$

ويمكن كتابة هذا القيد بشكل مفكوك على النحو التالي:

القيد الأول:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_1, i = 1,2,...... m$$

$$x_{12} + x_{12} + x_{13} + ...+ x_{1n} = a_1$$
$$x_{12} + x_{12} + x_{13} + ...+ x_{1n} = a_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + ...+ x_{mn} = a_m$$

القيد الثاني:

$$\sum_{n=1}^{m} x_{ij} = b_{ij} , j = 1,2,...... a$$

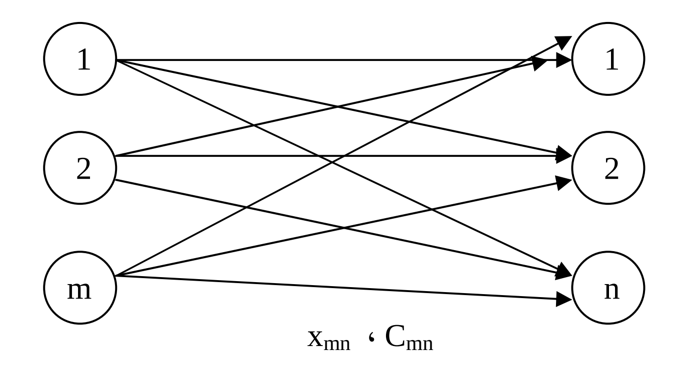
ويمكن كتابة هذا القيد بشكل مفكوك على النحو التالي:

$$x_{12} + x_{12} + x_{13} + ...+ x_{1n} = b_1$$
$$x_{12} + x_{12} + x_{13} + ...+ x_{1n} = b_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + ...+ x_{mn} = b_n$$

أما القيد الثاني فهو $x_{ij} \geq 0$ وهو قيد شرط عدم السلبية ويمكن توضيح الفكرة وفق المخطط



إيجاد الحل المبدئي لمشكلة النقل:

لحل مسائل النقل يتطلب الأمر إيجاد حل أولي مقبولاً ولاستخراج الحل الأولي لمسائل النقل يمكن استخدام الطرق الثلاث التالية:

1- طريقة الركن الشمالي الغربي (North-West Corner)

2- طريقة الأقل كلفة (Least Cost Method)

3- طريقة فوجل أو الجزاء (Vogel's Approximation Method)

مثال (1):

الجدول التالي يمثل مصفوفة تكلفة النقل أوجد بطريقة الركن الشمالي الغربي الحل المبدئي لهذه المسألة ثم أوجد تكلفة النقل الإجمالي باستخدام طرق أخرى إذا كانت المصفوفة كالآتي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	المصادر
Q_1	2	3	7	11	150
Q_2	0	12	5	6	125
Q_3	14	1	3	9	75
Q_4	10	2	5	8	50
	100	20	80	200	400 / 400

الحل: بطريقة الزاوية الشمالية الغربية

	D_1	D_2	D_3	D_4	المصادر
Q_1	2 (100)	3 (20)	7 (30)	11 –	150
Q_2	0 –	12 –	5 (50)	6 (75)	125
Q_3	14 –	1 –	3 –	9 (75)	75
Q_4	10 –	2 –	5 –	8 (50)	50
	100	20	80	200	400 / 400

Min cost = (100*2)+(20*3)+(30*7)+(50*5)
+(75*9)+(50*8)=
200 + 60 + 210 + 250 + 450 + 675 + 400

Min cost = 2245 L.D

ثانياً: طريقة أقل كلفة:

	D_1	D_2	D_3	D_4	المصادر
Q_1	2 –	3 –	7 –	11 (150)	150
Q_2	w 0 (100)	12 –	5 (25)	6 –	125
Q_3	14 –	w 1 (20)	3 (55)	9 -	75
Q_4	10 –	2 –	5 –	8 50	50
	100	20	80	200	400 / 400

Min cost = (100*0)+(0*0)+(25*5)+(20*1)
+(55*3)+(150*11)+(50*8)=
0 + 0 + 125 + 20 + 165 + 1650 + 400

Min cost = 2360 L.D

طريقة فوجل أو الجزاء:

	D_1	D_2	D_3	D_4	المصادر	فرق الصفوف
Q_1	2; –	3; (20)	7; (5)	11; (125)	150	3−2 [1], 7−3 ④, 7−3 ④, 11−7 ④
Q_2	0; (100)	12; –	5; –	6; 25	125	5−0 [5], 6−5 ①, 6−5 ①, 6−5 ①
Q_3	14; –	1; –	3; (75)	9; -	75	3−1 [2], 3−1 ②, 3−1 ②, 3−1 ②
Q_4	10; –	2; –	5; –	8; (50)	50	5−2 [3], 5−2 ③, 5−2 ③, 5−2 ③
	100	20	80	200	400 / 400	
فرق الأعمدة	2−0 [2], –	2−1 [1], 2−1 ①, ①, ①	5−3 [2], 5−3 ②, ②, ②	8−6 [2], 8−6		

Min cost = (20*3)+(7*5)+(125*11)+(100*0)
+(25*6)+(75*3)+(50*8)=
60 + 35 + 1375 + 0 + 125 + 225 + 400

Min cost = 2245 L.D

طرق للتأكد من الوصول إلى الحل الأمثل:

بعد استخدام الطرق السابقة في إيجاد التوزيع المبدئي للمشكلة يجب التأكد أن هذا الحل هو الأمثل والذي يؤدي إلى أقل كلفة ممكنة حيث يوجد هناك العديد من الطرق التي تساعدنا إلى الوصول إلى الحل الأمثل ومن بين هذه الطرق:

1- طريقة حجر التنقل (التخطي) (Stepping Stone Method).

2- طريقة التوزيع المعدلة Modified Distributing Method

أولاً: طريقة حجر التنقل (التخطي)

مثال: المصفوفة التالية توضح مشكلة نقل.

	D_1	D_2	D_3	D_4	Supplx
S_1	3	2	7	6	5000
S_2	7	5	2	3	6000
S_3	2	5	4	5	2500
Demand's	6000	4000	2000	1500	13500 / 13500

المطلوب:

قم بالتوزيع المبدئي ثُم أوجد التكلفة الإجمالية ثُم تأكد من الحل الذي تَم التوصل إليه يمثل أقل تكلفة لمشكلة النقل المعطاة.

الحـــــل: سيتم استخدام طريقة أقل الأسعار لإيجاد التوزيع المبدئي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	المجموع
S_1	3 (1000)	2 (4000)	7 _	6 -	5000
S_2	7 (2500)	5	2 (2000)	3 (1500)	6000
S_3	2 (2500)	5 _	4 _	5 -	2500
المجموع	6000	4000	2000	1500	13500 / 13500

$M + n - 1 \Rightarrow 3 + 4 - 1 = 6$

(2*2000)+(2*2500)+(7*2500)+(3*1500)+(2*2500) = مجموع لتكاليف

+(2*4000)+(3*1000) = 42000

1- بعد إيجاد التكلفة الإجمالية يتم تحديد الخلايا الأساسية والخلايا غير الأساسية.

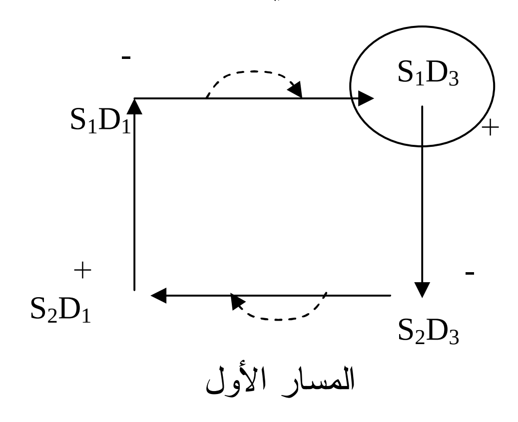
خلايا الغير أساسية	خلايا أساسية
S_1D_3	S_1D_1
S_1D_4	S_1D_2
S_2D_2	S_2D_1
S_3D_2	S_2D_3
S_3D_3	S_2D_4
S_3D_4	S_3D_1
(6) خلايا	(6) خلايا

2- تقويم الخلايا غير الأساسية (غير مستقلة) بطريقة الحجر التنقل

	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	3	2	7	6
S_2	7	5	2	3
S_3	2	5	4	5

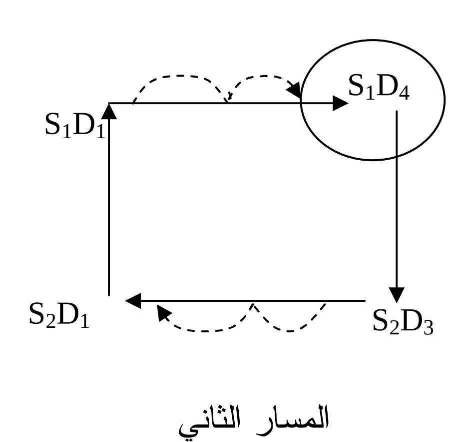
$S_1D_3 = 7 - 2 + 7 - 3 = {}^{+}9$

S_1D_4



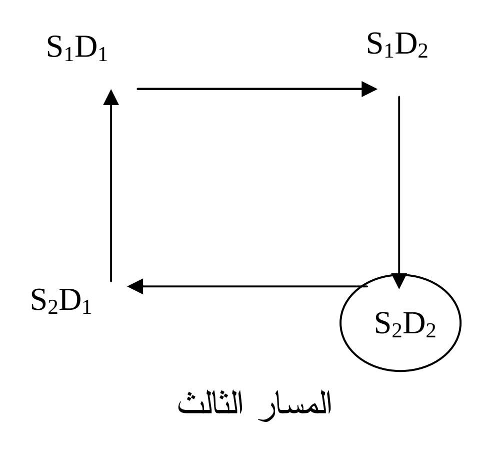
المسار الأول

$S_1D_4 = 6 - 3 + 7 - 3 = +7$



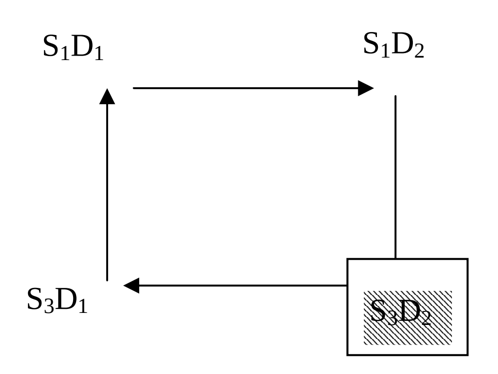
المسار الثاني

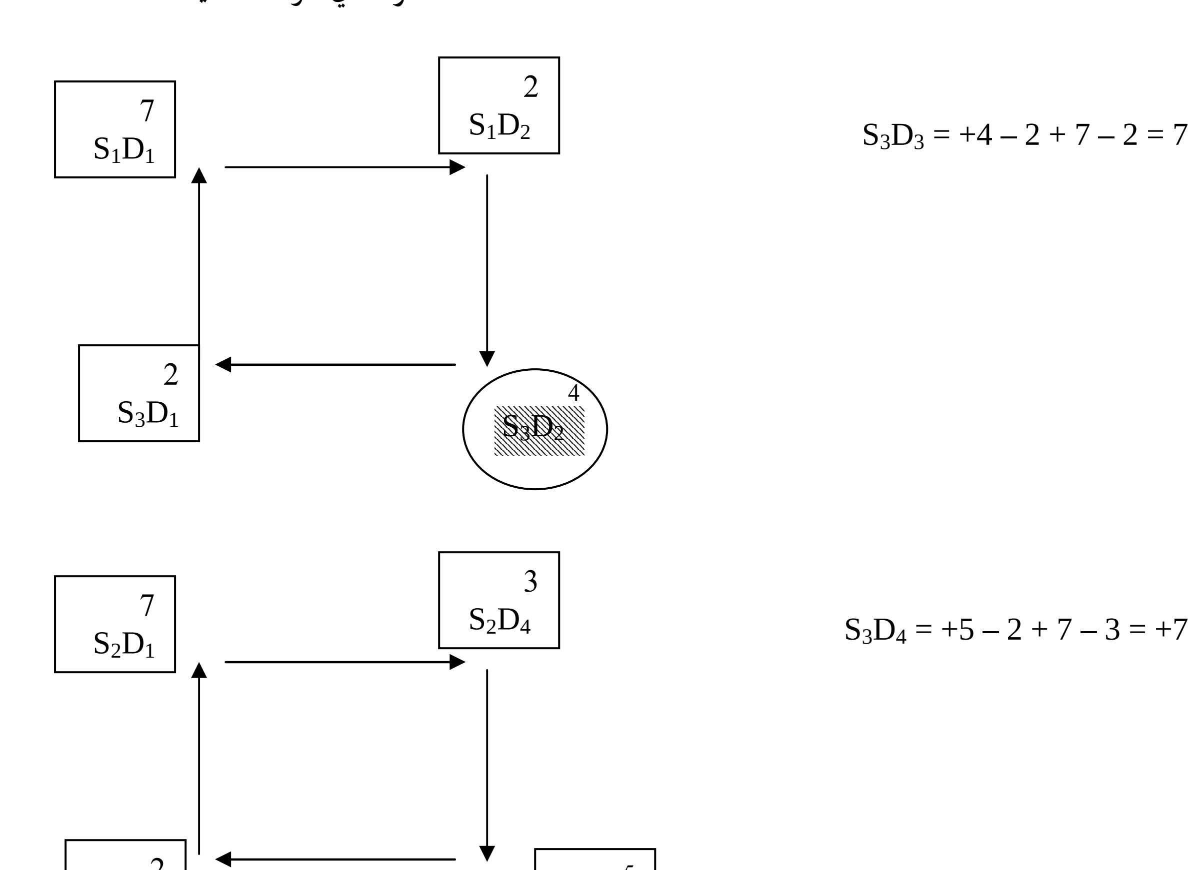
$S_1D_2 = 5 - 7 + 3 - 2 = -1$



المسار الثالث

$S_3D_2 = +5 - 2 + +3 - 2 = +4$





$$S_3D_3 = +4 - 2 + 7 - 2 = 7$$

$$S_3D_4 = +5 - 2 + 7 - 3 = +7$$

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	3 (1000)	2 (4000)	7 +9	6 +7	5000
S_2	7 (2500)	5 −1	2 (2000)	3 (1500)	6000
S_3	2 (2500)	5 +4	4 +7	5 +7	2500
	6000	4000	2000	1500	13500 / 13500

ومن هنا يلاحظ أن جميع القيم التي تخص الخلايا غير الأساسية جميعها موجبة ما عدا الخلية S_2D_2 كان تقييمها بـــ (-1) أي سالبة وهذا يعني أننا لم نصل إلى الحل الأمثل حيث يمكن أن نصل إلى الحل الأمثل عندما تكون جميع القيم التي تخص الخلايا غير الأساسية جميعها قـــيم

صفرية أو موجبة وبالتالي فإن الخلية (S_2D_2) الخلية المظللة قيمتها (−1) يعني ذلــك بــأن التكاليف يمكن تخفيضها بدينار واحد للوحدة الواحدة التي تقع داخل نطاق هذه الخلية.

وبالتالي فإن التوزيع الجديد يجب أن يتم النقل إلى الخلية الســالبة S_2D_2 وتخفــض الخلايــا الأخرى والمجاورة.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	3 (3500)	2 (1500)	7	6	5000
S_2	7	5 (2500)	2 (2000)	3 (1500)	6000
S_3	2 (2500)	5	4	5	2500
	6000	4000	2000	1500	13500 / 13500

$$M + n - 1 \Rightarrow 3 + 4 - 1 = 6$$

Min cost = (2*2500)+(3*1500)+(2*2000)+(5*2500)

+(2*1500)+(3*3500)

(5000) + (4500) + (4000) + (12500) + (3000)

+ 10500 = 39500 L.D

الوفرات الناتجة = (42000 − 39500) = 2500

ثانياً: طريقة التوزيع المعدلة

يمكن استخدام المثال السابق الذكر في إيجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدلة (MODI).

تتميز هذه الطريقة بأنها عندما يتم تحديد التوزيع المبدئي يتم احتساب مقدار معين لكل صف ولكل عمود في مصفوفة يتم استخدامها في تقويم الخلايا المشغولة حيث نرمز للصف بالرمز (Ui) حيث U_1 يعني الصف الأول و U_2 الصف الثاني ....وهكذا والعمود بالرمز (Vj) حيث V_1 يعني العمود الأول و V_2 العمود الثاني وهكذا.

حيث

القيمة المعطاة للصف Ui = i

القيمة المعطاة للعمود Vj = j

تكلفة أو ربح نقل الوحدة = Cij

الخلية التي تقع في الصف (i) والعمود (j)

وبالتالي نقوم بتحديد قيمة كل من Ci ، Cj من خلال المعادلة

$$\mathbf{Cij = Ui + Vj}$$ التكلفة أو الربح

	D_1	D_2	D_3	D_4		
S_1	3 / (1000)	2 / (4000)	7 / +9	6 / +7	5000	U_1 = (0)
S_2	7 / (2500)	5 / −1	2 / (2000)	3 / (1500)	6000	U_2 = (4)
S_3	2 / (2500)	5 / +4	4 / +7	5 / +7	2500	U_3 = (-1)
	6000	4000	2000	1500	13500 / 13500	

$$V_1 = 3 , V_2 = 2 , V_3 = -2 , V_4 = -1$$

تحديد قيمة كل من Ui ، Vj من خلال الخلايا المملوءة

بتطبيق المعادلة

Cij = Ui + Vj ⟵ تعني تكلفة النقل

نفرض أن U_1 = صفر

$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow 3 = 0 + V_1 \Rightarrow V_1 = 3$
$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow 2 = 0 + V_2 \Rightarrow V_2 = 2$
$C_{21} = U_2 + V_1 \Rightarrow 7 = U_2+3 \Rightarrow U_2 = 4$
$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow 2 = 4 + V_3 \Rightarrow V_3 = -2$
$C_{24} = U_2 + V_4 \Rightarrow 3 = 4 + V_4 \Rightarrow V_4 = -1$
$C_{31} = U_3 + V_1 \Rightarrow 2 = U_3 + 3 \Rightarrow U_3 = -1$

تقويم الخلايا أو المرافقات غير المملوءة بالكميات عن طريق استخدام المعادلة

$$\mathbf{Eij = Cij - Ui - Vj}$$

الخلايا غير المملوءة

$E_{13} = C_{13} - U_1 - V_3$ E_{13}
$E_{14} = C_{14} - U_1 - V_4$ E_{14}
$E_{22} = C_{22} - U_2 - V_2$ E_{22}
$E_{32} = C_{32} - U_3 - V_2$ E_{32}
$E_{33} = C_{33} - U_3 - V_3$ E_{33}
$E_{34} = C_{34} - U_3 - V_4$ E_{34}

$E_{13} = 7 - 0 + 2 = +9$
$E_{14} = 6 - 0 + 1 = +7$
$E_{22} = 5 - 4 - 2 = -1$
$E_{32} = 5 + 1 - 2 = +4$
$E_{33} = 4 + 1 + 2 = +7$
$E_{34} = 5 + 1 + 1 = +7$

ومن هنا نلاحظ بأن القيم التي تم الحصول عليها من خلال القانون السابق تحتوي على قيمة سالبة وهي الخلية (E_{22}) ⇦ D_2 S_2 وهذا يعني لم يتم التوصل إلى الحل الأمثل أما إذا كانت جميع القيم تحمل إشارة موجبة وقيم صفرية فهذا يعني بأن الحل الذي تم التوصل إليه حلاً أمثل.

كما يتم استخدام طريقة أخرى إضافية من خلال إيجاد الفرق بين مصفوفة التكلفة غير المباشرة والتكلفة المباشرة.

وتكون مصفوفة التكلفة غير المباشرة إيجادها على النحو التالي:

	$V_1 = 3$	$V_2 = 2$	$V_3 = -2$	$V_4 = -1$	
$U_1 = 0$	3	2	−2	−1	$U_1 = 0$
$U_2 = 4$	7	6	2	3	$U_2 = 4$
$U_3 = -1$	2	+1	−3	−2	$U_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -1 \\ 7 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & +1 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & -9 & -7 \\ \text{صفر} & +1 & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & +4 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

إذا كانت مصفوفة الفرق جميع عناصرها سالبة وصفرية فإن الحل الذي تم الوصول إليه هو حل أمثل.

أما إذا كانت مصفوفة الفرق تحتوي على رقم موجب فهذا يعني بأن الحل ليس حـــلاً أمثـــل وحيث إنه أحد عناصر مصفوفة الفرق تحتوي رقم سالب فإنه لا يعد حل أمثل.

Asssigmint Problems
مشاكل التخصيص

تهتم مشاكل التخصيص بتوزيع عدد معين من الأعمال وليكن (م) على عدد معين من الآلات وليكن (ن) آلة، علماً بأن المشروع يتحمل تكلفة وهي (لم ن) عند تخصيص العمل (م) على الآلة (ن) حيث (م = 1 ، 2 ... م)، وكذلك (ن = 1 ، 2 ... ن)، وهنا تتم عملية التخصيص بشرط مراعاة ما يلي:-

1- أن يخصص كل عمل لآلة واحدة فقط.

2- أن يتم التخصيص بحيث تكون دالة الهدف أقصى ما يمكن (في حالة تعظيم الربح) أو أقل ما يمكن وهي القالية (في حالة تدني النفقات).

ويمكن النظر إلى هذه المشكلة على أنها حالة خاصة لمشكلة النقل، إذ تعد الأعمال بمثابة الجهات الطالبة والآلات بمثابة المصادر، علماً بأن الكميات المتاحة في كل مصدر، وكذلك الكميات المطلوبة لكل جهة طالبة تساوي دائماً الواحد الصحيح.

وفي حالة عدم الرغبة في تخصيص عمل معين لآلة معينة كإستحالة تحقيق ذلك عملياً أو لأي أسباب أخرى فنية، فإنه يمكن افتراض تكلفة التشغيل عالية جداً لهذه الخلية المقابلة أي أن نفترض أن (رم ن = ك) حيث ك = أعلى قيمة موجبة.

ويلزم لحل مشكلة التخصيص تحقيق التوازن من الآلات والأعمال الأمر الذي يقتضي إضافة الآت وهمية أو أعمال وهمية على أن تكون تكلفة (دم ن) المقابلة في هذه الحالة مساوية للصفر.

حيث يمكن صياغة النموذج كما يلي:-

$$\text{Min}\ (z) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} C_{ij} - x_{ij}$$

Subject to:-

$$\sum_{i=1} \sum_{j=1} X_{ij} = 1$$

$$i = 1,\ 2\ ,3\ , \dots \dots \dots$$

$$\sum_{j,i} X_{ij} = 1$$

j,i لجميع $X_{ai} = 0$ or 1

j,i لجميع $X_{ij} = 0$ or 1

ويمكن تطبيق هذه الصياغة على المثال التالي:-

X_{ij} { 1 في حالـــــة تخصيص آلة i الفرد j
{ 0 في حالة عدم تخصيص آلة j الفرد j

ويكون مجموع التكاليف الكلية لتعيين الأفراد إلى الآلات سيكون Z حيث Z يمكن التعبير عنها:-

الآلات

الأفراد	A	B	C
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}
3	X_{31}	X_{32}	X_{33}

$$\begin{aligned} Min\,(Z) = \; & X_{11} + X_{12} + X_{13} + \\ & X_{21} + X_{22} + X_{23} + \\ & X_{31} + X_{32} + X_{33} + \end{aligned}$$

هذه المسألة تحتاج إلى نوعين من القيود:-

<u>المجموعة الأولى</u> أنه لا يمكن تكليف فرد واحد للإشراف على أكثر من آلة واحدة فقط بعبارة أخرى...

الصف الأول : $X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1$

الصف الثاني : $X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1$

الصف الثالث : $X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$

<u>أما المجموعة الثانية</u> من القيود فتقتضي عدم تعيين أكثر من فرد للإشراف على آلة واحدة فقط وبعبارة أخرى....

العمود الأول : $X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1$

العمود الثاني : $X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1$

العمود الثالث : $X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$

حيث X_{ij} تساوي 0 أو 1

الشروط:-

مشكلة التخصيص أحد أساليب المعتمدة في توزيع الموارد النادرة ومن أساليب البرمجة الخطية البسيطة وأن شروط تطبيقها كالآتي:-

1- تساوي عدد الأشخاص مع عدد العمليات أو الوظائف المطلوب إنجازها.

2- الوسيلة المتوفرة (عامل/ آلة) تؤدي عمل واحد وعدم السماح لها بالقيام بأكثر من ذلك.

3- كلفة الأداء معروفة ومحددة مسبقاً.

4- شروط اللاسلبية وهذا يعني عدم وجود كلفة سالبة.

ويمكن استخدام مشكلة التخصيص في المجالات التالية:-

1- تخصيص عدد معين من وسائل الإنتاج (الآلات) لصناعة مجموعة من أوامر الإنتاج أو إجزاء معينة.

2- توزيع وظائف أو أعمال معينة على عدد من العمال أو الموظفين.

3- تخصيص وسائل نقل معينة (وسائل مناولة) لنقل السلع من مكان لأخر.

طرق التخصيص:-

لحل مشاكل التخصيص هناك طريقتان هما:-

1- طريقة التوافق المختلفة.

2- الطريقة المختصرة.

أولاً:- طريقة التوافق المختلفة

تعتمد هذه الطريقة بالشكل المباشر على نظرية الاحتمالات ومن الطرق المطولة وخاصة إذا كانت المشكلة مكونة من عدد كبير من الوظائف والأعمال المراد تخصيصها، وهنا يتطلب الأمر إحتساب التكلفة أو الربح الأعظم، ويمكن إيجاد البدائل باستخدام طرق العد، إلا أن عيب هذه الطريقة سيكون شاقاً إذا كان عدد الوظائف كبيراً، وفي بعض الأحيان يصعب حلها.

مثال على طريقة التوافق المختلفة:-

لدينا ثلاث آلات وهي (A , B , C) وثلاثة أوامر (1، 2، 3) والجدول التالي يبين الوقت الزمني لتنفيذ الالآت لأمر معين.

المطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل الذي يحقق تنفيذ الأوامر الثلاث من قبل الالآت بأقل وقت ممكن.

الأوامر / الالآت	1	2	3
A	10	22	9
B	10	4	13
C	6	9	12

الحل:-

إن الاحتمالات المتاحة هي ست احتمالات أي (مفكوك 3)، وهي كالآتي

$3 \times 2 \times 1 = 6$ احتمالات.

الاحتمالات	الأوامر			التكلفة الأمر	القيمة
	1	2	3		
1	A	B	C	21 + 4 + 10	35
2	A	C	B	13 + 9 + 10	32
3	B	A	C	21 + 22 + 10	53
4	B	C	A	9 + 9 + 10	28
5	C	A	B	13 + 22 + 6	41
(6)	C	B	A	9 + 4 + 6	(19)

وهنا يكون الحل الأمثل لهذه البدائل، ويتم اختبار أقل تكلفة وهي الاحتمال رقم (6) حيث يمثل أقل ما يمكن وهنا يتم تخصيص.

الأمر رقم (1) إلى الآلة رقم C

الأمر رقم (2) إلى الآلة رقم B

الأمر رقم (3) إلى الآلة رقم A

ثانياً:- الطريقة المختصرة.

تعتمد إجراءات الحل وفق هذه الطريقة على ما يسمى (بالمصفوفة المتناقصة) والتي تستلزم طرح وإضافة أرقام ملائمة في هذه المصفوفة ومن خلالها نستطيع أن نحقق الحل الأمثل، وأن الوصول إلى الحل الأمثل يعتمد على هدف مشكلة التخصيص إما الوصول إلى أدنى كلفة ممكنة أو الوصول إلى أقصى إيراد ممكن.

- **في حالة تحقيق أدنى تكلفة ممكنة:-**

1- وضع المعلومات المتوفرة على شكل جدول (مصفوفة).

2- تحديد أقل قيمة في كل صف وطرحها من قيم ذلك الصف.

3- تحديد أقل قيمة في كل عمود وطرحها من قيم ذلك العمود.

4- اختبر الصفوف فإذا وجدت صفاً به صفر واحد خصصه وأشطب باقي أصفار العمود الموجود به ذلك الصفر.

5- اختبر الأعمدة فإذا وجدت عموداً به صفراً واحداً خصصه وأشطب باقي أصفار الصف الموجود به الصفر.

6- إذا لم تصل إلى حلاً كاملاً اتبع الخطوات التالية:-

أ- نغطي الأعمدة التي بها أصفار خصصت عند اختيار الصفوف (خطوة رقم 4) بخط مستقيم يمر على هذه الأصفار.

ب- نغطي الصفوف التي بها أصفار خصصت عند اختيار الأعمدة (خطوة رقم 5) بخط مستقيم يمر على هذه الأصفار، ينتج من ذلك أن تصبح جميع الأصفار المخصصة مغطاة بخطوط.

ج- أحصل على أقل قيمة غير مغطاة بخط.

د- أطرح هذه القيمة من كل قيمة لم يمر بها خط.

ه- أجمع هذه القيمة على كل قيمة تقع عند تقاطع خطين.

و- القيم التي يمر بها خط، وكذلك الأصفار تظل كما هي عليه.

ز- كرر الخطوات (ج، د، هـ) حتى تصل إلى حل كامل.

- **تحقيق أعلى إيراد ممكن:-**

يمكن اعتماد الخطوات السابقة في عملية التخصيص لحل المشاكل التي تهدف إلى تحقيق أقصى العوائد إلا في عملية البدء بالحل، حيث يستلزم بعد إعداد المصفوفة المتضمنة للمعلومات تحويلها إلى مصفوفة كلف، وذلك بطرح جميع الأرقام الموجودة في المصفوفة من أكبر رقم فيها، بعد ذلك نستمر في عمليات التخصيص حتى نصل إلى الحل الأمثل باستخدام الخطوات السابقة التي تم شرحها.

أمثلة على التخصيص:-

مثال (1):-

نفرض أن لدينا ثلاث أعمال وكذا ثلاث آلات، وكان جدول التكلفة كما يلي:-

من / إلى	(1)	(2)	(3)	أ م
(1)	5 1	7	9	1
(2)	14	10	12	1
(3)	15	13	16	1
ب ن	1	1	1	

ويتم تحقيق ذلك وفقاً لخطوات الحل التالية:-

1- ضمان وجود صفر في كل صف وفي كل عمود.

أ- نختار أقل قيمة في كل صف ونطرحها من قيم هذا الصف.

ب- نختار أقل قيمة في كل عمود ونطرحها من قيم هذا العمود.

ويمكن تطبيق ذلك على المثال السابق كما يلي:-

	1	2	3	
1	0	2	4	$ك_1$ = 5
2	4	0	2	$ك_2$ = 10
3	2	0	2	$ك_3$ = 13

	1	2	3	
1	0	2	2	$ك_1$ = 5
2	4	0	0	$ك_2$ = 10
3	2	0	1	$ك_3$ = 13
	$ل_1$ = 0	$ل_2$ = 0	$ل_3$ = 2	

2- تغطية الأصفار بأقل عدد ممكن من الخطوط وإجراء التخصيص.

نحدد أقل عدد ممكن من الخطوط تلزم لتغطية الأصفار إلى أن نصل إلى الحل الأمثل إذا كان عدد هذه الخطوط مساوياً (ن)، أما إذا كان عدد الخطوط أقل من (ن) كان معنى ذلك أننا لم نصل إلى الحل الأمثل، كما أن عدد الخطوط لن تزيد عن (ن) بطبيعة الحال، إذا أن (ن) خط كافية لتغطية كل أرقام الجدول.

ويتم تحديد هذا الحد الأدنى من الخطوط اللازم لتغطية الأصفار في نفس الوقت الذي تقوم فيه بإجراء تخصيص الأموار على الالآت وذلك كما يلي:-

أ- نختبر الصفوف فإذا كان بالصف صفر وحيد نخصصه ونشطب العمود الذي يقع فيه هذا الصفر، ونكن بذلك قد تم تغطية الصفر الوحيد لهذا الصف وكذا تغطية ما قد يوجد من أصفار أخرى في نفس العمود الذي يقع فيه هذا الصفر.

ب-نختبر الأعمدة فإذا كان بالعمود صفر وحيدج نخصصه ونشطب الصف الذي يقع فيه هذا الصفر.

نكرر الخطوات (أ ، ب) إلى أن يتم تغطية كل أصفار الجدول، فإذا كان عدد الخطوط مساوياً (ن) كان معنى ذلك أننا وصلنا إلى الحل الأمثل، وأنه قد تم إجراء التخصيص الأمثل.

وذلك كما في المثال السابق، حيث نجد أن تكرار (أ ، ب) يؤدي إلى:-

	1	2	3
1	[0]	2	2
2	4	0	[0]
3	2	[0]	1

فيكون الحل الأمثل هو (1،1)، (2، 3)، (3،2) وتكون تكلفة الحل

ح = (5 + 12 + 13 = 30 ونلاحظ هنا أن:-

$$\text{ح} = \text{حَ} + \sum_{\text{م}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{م}} + \sum_{\text{ن}=1}^{\text{ن}} \text{ل}_{\text{ن}}$$

= 0 + (5 + 10 + 13) + 2

= 30

إلا أنه في أحوال أخرى قد لا تكفي الخطوات السابقة للوصول إلى الحل الأمثل، وذلك إذا ما وجدنا أنه من الممكن تغطية كل أصفار الجدول بعدد من الخطوط أقل من (ن)، وذلك في المثال التالي:-

مثال (2):

إذا كانت التكلفة الخاصة بتخصيص (4) أوامر إنتاج على كل آلة من الالآت الأربع المتاحة في مشروع ما كما يلي:-

	1	2	3	4
1	①	4	6	3
2	8	⑦	10	9
3	④	5	11	7
4	6	7	8	⑤

كل رقم في دائرة يعني أصغر قيمة في كل صف.

وبتطبيق خطوات الحل السابقة نصل إلى ما يلي:-

	1	2	3	4	
1	0	3	5	2	$\text{ك}_1 = 1$
2	1	0	3	2	$\text{ك}_2 = 7$
3	0	1	7	3	$\text{ك}_3 = 4$
4	1	2	3	0	$\text{ك}_4 = 5$

	4	3	2	1	
ك$_1$ = 1	2	2	3	[0]	1
ك$_2$ = 7	2	0	[0]	1	2
ك$_3$ = 4	3	4	1	0	3
ك$_4$ = 5	0	[0]	2	1	4

ل$_3$ = 3

ويتبين مما سبق أنه تم تغطية كل أصفار الجدول بثلاثة خطوط < ن = 4

ولذا إذا انتهت الخطوتين (أ ، ب) دون تغطية كل الأصفار ففي هذه الحالة نقوم بما يلي:-

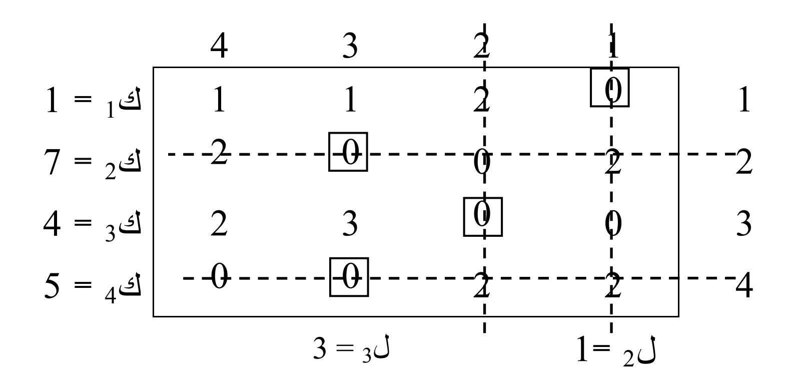
ج- في حالة وجود أكثر من صفر في كل صف وفي كل عمود فهنا عند اختيار الصفوف نختار أحد هذه الأصفار ونخصصها ثم نقوم بتغطية العمود الواقع به هذا الصفر، ثم نكرر الخطوات السابقة (أ ، ب) بالنسبة للصفوف التي لم يحدث بها تخصيص، وكذا عند اختبار الأعمدة إذا كان هناك دائماً أكثر من صفر يتم تخصيص أحد هذه الأصفار ثم يتم تغطية الصف الواقع به هذا الصفر، ثم نكرر الخطوات (أ، ب) بالنسبة لباقي الأعمدة التي لم يحدث بها تخصيص، ويستمر إلى أن يتم تغطية كل الأصفار بخطوط، فإذا كان عدد هذه الخطوط مساوياً (ن) كان يعني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل، أما إذا كان عددها أقل من (ن) ننتقل إلى الخطوة رقم (3) التالية:-

- **حالة تغطية الأصفار بعدد من الخطوط < ن**

بعد تغطية الأصفار بأقل عدد من الخطوط الأفقية والرأسية وذلك كما في الخطوة (2)، فإنه يتم اختيار أقل قيمة غير مغطاة بخطوط وهي (1) في المثال السابق ثم يتم طرحها من العناصر غير المغطاة بخطوط على أن تضاف إلى العناصر المغطاة بخطين، إذ تضمن بذلك خلق صفر واحد جديد على الأقل.

ويرجع عدم طرح هذه القيمة الأقل من العناصر المغطاة بخط واحد إلى تفادي خلق قيم سالبة، وذلك في حالة الطرح من القيم الصفرية الموجودة في الصف أو العمود المغطى بخط وحيد، كما أننا في غير حاجة إلى خلق صفر جديد في صف أو عمود به صفر أو أكثر، وذلك حتى لا نخلق في نفس الصف أو العمود أصفار لا تتساوى من حيث الكفاءة مع الأصفار الموجودة سابقاً، إذ يجب أن نخلق الأصفار الجديدة في أحد الخلايا غير المغطاة كمحاولة لإضافة أحسن خلايا يمكن أن يوجد بها حل أمثل إلى مجموعة الخلايا السابق تحديدها فعلاً، أما إضافة هذه القيمة الأقل إلى العناصر المغطاة بخطين فيرجع ذلك إلى الرغبة في إبعاد هذه العناصر وتفادي تحويلها إلى عناصر صفرية في جداول مستقلة، وذلك نظراً لأن هذه العناصر واقعة في صف به أصفار وكذا عمود به أصفار، فهي ليست

الخلية المفضلة إذا ما نظرنا إلى الصفوف أو الأعمدة ولذا يجب أبعادها عن الحل الأمثل، وبهذا يصبح جدول التكلفة الجديد في المثال السابق كما يلي:-



ويكون هذا هو الحل الأمثل وتكلفة الحل = 1 + 5 + 10 + 5 = 21

ونلاحظ أن ح̄ = ح - مجـ $\sum_{م=1}^{ن}$ كم - مجـ $\sum_{ن=1}^{ن}$ لن

أي أن 0 = ح − (1 + 7 + 4 + 5) − (1 + 3)

∴ ح 17 + 4 = 21

وفي حالة عدم الوصول إلى الحل الأمثل نكرر الخطوات السابقة حتى نصل إلى الحل الأمثل للمشكلة محل البحث.

ونلاحظ أن الحل ينتهي في بعض المسائل إلى وجود عدة بدائل يمكن اختيار أي منها لتمثيل الحل الأمثل، وذلك كما في المثال التالي:-

المطلوب تخصيص أربع أعمال على أربع الآت وكانت تكلفة التشغيل كما يلي:-

الآلات

الأعمال	1	2	3	4
1	8	9	⑦	12
2	10	15	⑤	13
3	②	6	8	4
4	10	8	⑦	9

1- ضمان وجود صفر في كل صف وفي كل عمود.

أ- نختار أقل قيمة في كل صف ونطرحها من قيم هذا الصف ليصبح الجدول كما يلي:-

	4	3	2	1	
$ك_1$ = 7	5	0	2	1	1
$ك_2$ = 5	8	0	10	5	2
$ك_3$ = 2	2	6	4	0	3
$ك_4$ = 7	2	0	1	3	4

ب–نختار أقل قيمة في كل عمود ونطرحها من قيم هذا العمود فيصبح الجدول كما يلي:–

	4	3	2	1	
$ك_1$ = 7	3	0	1	1	1
$ك_2$ = 5	6	0	9	5	2
$ك_3$ = 2	0	6	3	0	3
$ك_4$ = 7	0	0	0	3	4
	$ل_4$ = 1		$ك_2$ =1		

2– تغطية الأصفار بأقل عدد ممكن من الخطوط وإجراء التخصيص.

نطبق الخطوة (أ ، ب) الخاصة باختبار الصفوف والأعمدة حيث يتم تغطية كل الأصفار بعدد من الخطوط = 3 < ن = 4

4	3	2	1	
3	0	1	1	1
6	0	9	5	2
0	6	3	0	3
0	0	0	3	4

3– نختار أقل قيمة غير مغطاة بخطوط ونطرحها من القيم غير المغطاة بخطوط ونضيفها على القيم المغطاة بخطين فيصبح الجدول الجديد كما يلي:–

4	3	2	1	
2	0	0	0	1
5	0	8	4	2
0	7	3	0	3
0	1	0	3	4

وهنا نجد صعوبة في تخصيص الأوامر على الآلات، وذلك بسبب وجود أكثر من صفر في الصف أو العمود المختبر، إذ تؤدي عمليات الاختبار إلى تخصيص الأمر الإنتاجي الثاني على الآلة الثالثة فقط دون إمكانية تخصيص باقي أوامر الإنتاج، وذلك رغم وجود مجموعة من الأصفار غير المخصصة، ولذا عند اختبار الصفوف نختار أحد هذه الأصفار ونخصصها ثم نقوم بتغطية العمود الواقع به الصفر ونستكمل الخطوات (أ ، ب) السابقة، وكذا نختبر الأعمدة فإذا كان هناك أكثر من صفر في كل عمود نختار أحد هذه الأصفار ونشطب باقي أصفار الصف وتستكمل الخطوات (أ، ب) السابقة وبتطبيق ذلك نصل إلى الجدول التالي:-

4	3	2	1	
2	0	0	[0]	1
5	[0]	8	4	2
[0]	7	3	0	3
0	1	[0]	3	4

ويكون الحل (1، 1)، (2، 3)، (3، 4)، (4، 3)، وتكلفة الحل هي

ح = 8 + 5 + 4 + 8 = 25

يلاحظ أنه في حالة اختيار الخلية (1، 3) بدلاً من (1، 1) نصل إلى حل آخر بديل.

مثال (4)

فيما يلي تكاليف تشغيل أربعة أوامر على أربعة آلات مختلفة والمطلوب تحديد التخصيص الأمثل.

4	3	2	1	الآلات / الأوامر
60	50	50	70	أ
110	90	30	30	ب
60	20	10	30	ج
60	70	20	50	د

خطوات الحل:-

1. بالنسبة لكل صف .. أطرح أقل رقم من كل الأرقام في ذات الصف، وذلك سوف يجعل في كل صف على الأقل صفراً واحداً، وسوف تكون النتيجة مثل الجدول التالي:

الآلات / الأوامر	1	2	3	4
أ	20	صفر	صفر	10
ب	صفر	صفر	60	80
ج	20	صفر	10	50
د	30	صفر	50	40

2. بالنسبة لكل عمود (في الجدول السابق مباشرة) أطرح أقل رقم من كل الأرقام في ذات العمود، وبذلك تضمن وجود صفر واحد في كل عمود على الأقل، وتكون النتيجة مثل الجدول التالي:

الآلات / الأوامر	1	2	3	4
أ	20	صفر	صفر	صفر
ب	صفر	صفر	60	70
ج	20	صفر	10	40
د	30	صفر	50	30

3. أرسم أقل عدد من الخطوط المستقيمة الرأسية والأفقية التي تغطي جميع الأصفار في الجدول السابق، وذلك كما يلي:-

الآلات / الأوامر	1	2	3	4
أ	20	صفر	صفر	صفر
ب	صفر	صفر	60	70
ج	20	صفر	10	40
د	30	صفر	50	30

4. إذا كان أقل عدد من الخطوط في الخطوة السابقة يعادل عدد الأفراد وعدد الآلات، توقف، حيث يمكن تحديد الآن التخصيص الأمثل، أما إذا كان هذا العدد أقل من عدد الأوامر وعدد الآلات قم بالخطوة رقم (5)، وفي حالة مثالنا هذا بما أن عدد الخطوط ثلاثة وهو أقل من عدد الآلات، فإنه يجب القيام بالخطوة الخامسة.

5. اختار أقل رقم من بين الأرقام غير المغطاة بخطوط مستقيمة، وهو رقم 10، ثم قم بعمل جدول جديد بياناته كما يلي:-

أ- بالنسبة للأرقام غير المغطاة أطرح الرقم الذي أختير 10 من كل منها وضعها بعد الطرح في الجدول الجديد.

ب- بالنسبة للأرقام المغطاة بتقاطع من الخطوط المستقيمة أضف إلى الرقم 10 ثم ضعها في الجدول الجديد بعد الإضافة.

ج- بالنسبة للأرقام المغطاة بخط واحد أنقلها كما هي.

وبذلك يكون الجدول التالي كما يلي:-

الآلات / الأوامر	1	2	3	4
أ	20	10	صفر	صفر
ب	صفر	10	60	70
ج	10	صفر	صفر	30
د	20	صفر	40	20

6. كرر الخطوة (4) وهي التي يتم فيها اختبار هل يجب التوقف أم لا، وفي هذه الحالة أقل عدد من الخطوط الذي يغطي الأصفار لابد وأن يعادل عدد الآلات والأوامر، حيث أنه أربعة خطوط مستقيمة رأسية أو أفقية، وذلك يعني التوقف في هذا المثال عند هذا الحد، أما إذا كان الرقم أقل فيجب تكرار الخطوة (5) حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل.

<u>والسؤال الآن ما هو الحل الأمثل؟</u>

من الجدول الأخير يمكن تحديد أفضل تخصيص على النحو التالي:

أ- بالنسبة للصفوف التي بها صفر واحد في أخر جدول اختر هذا الصف، بمعنى خصص الأمر على الآلة التي بها الصفر لتشغيل الأمر في الصف الذي به ذات الصفر، وفي المثال يتم اختيار الصفر الوحيد في الصف (ب) أولاً، بمعنى تخصيص الأمر (ب) على الآلة ثم يتم استبعاد تلك الآلة والأمر من التخصيص بعد ذلك.

ب- بعد حذف الآلة (أ) والأمر (ب) يتبقى جزء من الجدول بالصف الرابع فيه صفر واحد، ولذلك يتم اختياره، وبالتالي يخصص الأمر (د) على الآلة (2) ثم استبعاد الآلة (3) والأمر (د) في

الجزء المتبقي يكون هناك الصف (جـ) به صفر واحد ولذلك يتم اختياره، وبمعنى ذلك تخصيص (جـ) على (3)، (د) يتبقى بعد ذلك صفر واحد ويعني تخصيص (أ) على (4).

ويمكن تلخيص التخصيص الأمثل على النحو التالي:-

الأمر	الآلة	تكاليف التشغيل
أ	4	60
ب	1	30
ج	2	20
د	3	20

الحد الأدنى للتكاليف حسب التخصيص الأمثل هو 130 (يوم أو جنيه).

ويجب أن نشير إلى عدة حقائق هامة خاصة بطريقة التخصيص:-

1- يمكن أن يستخدم نفس الأسلوب في حالة تعظيم الربح أو العائد كهدف للتخصيص.

2- يمكن استخدام الأسلوب في حالة عدم تساوي عدد الأوامر مع عدد الآلات وذلك بإضافة متغيرات (آلة أو أمر) وهمية بتكاليف (أو عائد) صفر في الجدول الأصلي، وفي هذه الحالة سوف ينطوي الحل الأمثل على آلة عاطلة أو أمر لا يتم تشغيله.

3- في حالة المواقف الأكثر تعقيداً يمكن استخدام طريقة النقل أو البرمجة الخطية للوصول إلى الحل الأمثل.

4- في حالة عدم إمكانية تخصيص أمر معين على آلة معينة لأسباب فنية مثلاً يتم وضع رقم تكاليف مرتفع جداً في الخلية المقابلة حتى تضمن عدم التخصيص.

تحليل الشبكات
Net Work Analysis

المقدمة:-

يقصد بالشبكة المشروع الذي يتكون من عدد من الأنشطة أو الواجبات التي يجب تأديتها بترتيب معين، حتى ينجز المشروع بالكامل، وهذا المشروع يأخذ أشكال مختلفة (مشروع بناء – عملية إنتاجية لسلعة معينة– تقديم خدمة معينة).

أما النشاط أو الواجب فهو العمل الذي يبدأ في نقطة زمنية معينة وينتهي في أخرى ويحتاج إلى وقت وإمكانيات لتنفيذه، ويتم التعبير عنه في شكل سهم ويسمى النقطة الزمنية التي ينتهي فيها أي نشاط (حدث) ويتم التعبير عنها في شكل دائرة، وقد تم التوصل إلى تقنين الدراسة وتحليل الشبكات إلى أسلوبين هما:-

- طريقة المسار الحرج (CPM).
- أسلوب مراجعة وتقييم المشروعات (PERT).

تعريف تحليل الشبكات:-

هو عبارة عن: "أسلوب قني لتخطيط وجدولة ومراجعة المشروعات عن طريق تخفيض إدارة المشروعات الكبيرة إلى خطوات محددة"، أو هو: "مجموعة من النقاط وخطوط تصل تلك النقط ببعضها البعض، حيث أن كل نقطة ترتبط بنقطة أو أكثر من خلال مجموعة من الخطوط".

بناء شبكة المشروع:-

تعتبر الخطوة الأولى في تطبيق تحليل الشبكات (المسار الحرج – بيرت) هي التعرف على المشروع الذي يجب أن يخطط له وذلك عن طريق تحديد الوظائف والأنشطة التي يتكون منها ورسم هذه الأنشطة بيانياً ويطلق على هذه المرحلة الوجه التخطيط للمشروع، ولكن قبل البدء في رسم الشبكة هناك مجموعة من القواعد والشروط يجب أن نأخذها بعين الاعتبار، وهي:-

1- تبدأ الشبكة البيانية بالمحادثة البدائية والتي لا يصلها أي سهم وتنتهي بالحادثة النهائية والتي لا يخرج منها أي سهم.
2- كل حادثة (دائرة) مرحلية يجب أن يصلها سهم (نشاط) واحد على الأقل، ويخرج منها سهم واحد على الأقل، ويجوز أن يكون أكثر من ذلك.
3- كل نشاط (سهم) يجب أن تسبقه وتتبعه حادثة (دائرة) ما عدا الحادثة البدائية والنهائية.

4- يجب أن لا يكون في الشبكة أقسام معزولة ليس لها علاقة بالعمل في المشروع.

5- لا يجوز أن تعود الأنشطة في الشبكة إلى نفس النقطة التي تبدأ منها.

ما المقصود بالمفاهيم التالية؟

1- النشاط.

هو العمل اللازم لإتمام حدث معين لكل نشاط نقطة بداية ونقطة نهاية، ويستغرق النشاط وقتاً زمنــياً بين بدايتــه ونهايته، وتصور الأنشطة في شكل أسهم يكتب عليها الوقت المقــدر للانتــــهاء (الزمن ⟵)..

2- النشاط الوهمي أو التخيلي أو الافتراضي

وهي الأنشطة التي تضاف إلى الشبكة وذلك لغرض استكمالها، ولكن ليس لها تأثير على الشبكة أو التكاليف أو الموارد، وهذه الأنشطة لها علاقة بالتبعية بين نشاط ونشاط أخر، وقد يطلق عليها (بالأسهم التبعية) ويوضع عليها وقت يساوي صفر وهي نوعين:-

أ- الأنشطة التخيليلة المنطقية.

ب-الأنشطة التخيلية المتشابهة.

3- أحداث.

يطلق على بداية أو نهاية أي نشاط بالأحداث، فالحدث عبارة عن نقطة زمنية أو بنفس المعنى الحدث هو إنجاز معين يتم عند نقطة معروفة من الزمن، ويعبر عن الحدث بالدائرة (O).

4- الشبكة.

وهي عبارة عن تصوير لخطة مشروع معين، وهي توضح العلاقات المتداخلة بين أنشطة المشروع، وقد يطلق على الشبكات (الرسوم السهمية) أي الأسهم، وعندما يتم احتساب الوقت يطلق عليها الشبكة، وتسمى محموعة الأحداث أو الحلقات والأسهم مجتمع مع بعضها البعض في شكل بياني (بالشبكة البيانية)، وتستخدم هذه الشبكة في تحديد أقل زمن ممكن للانتهاء من المشروع أو أقل تكلفة ممكنة لتحقيق عمليات الإنتاج الممكنة ووضع البدائل الممكنة لتقليص الفترة الزمنية.

بناء نموذج التحليل الشبكي:-

يلزم لتطبيق أسلوب المسار أو أسلوب تخطيط وجدولة المشروعات أن يتم تحليل المشروع أو تجزئته إلى محددة وواضحة فيلزم أن يتم تحديد وتعريف كل جزئية من المشروع والمهام اللازمة لتنفيذها بوضوح ودقة حتى تتوافر إمكانية التمييز بين الأنشطة، وفي إطار النماذج التحليل الشبكي وبعد أن يتم تحليل المشروع إلى الأنشطة والمهام اللازمة لتنفيذه، وتحديد الأحداث يتم وضع نتائج هذا

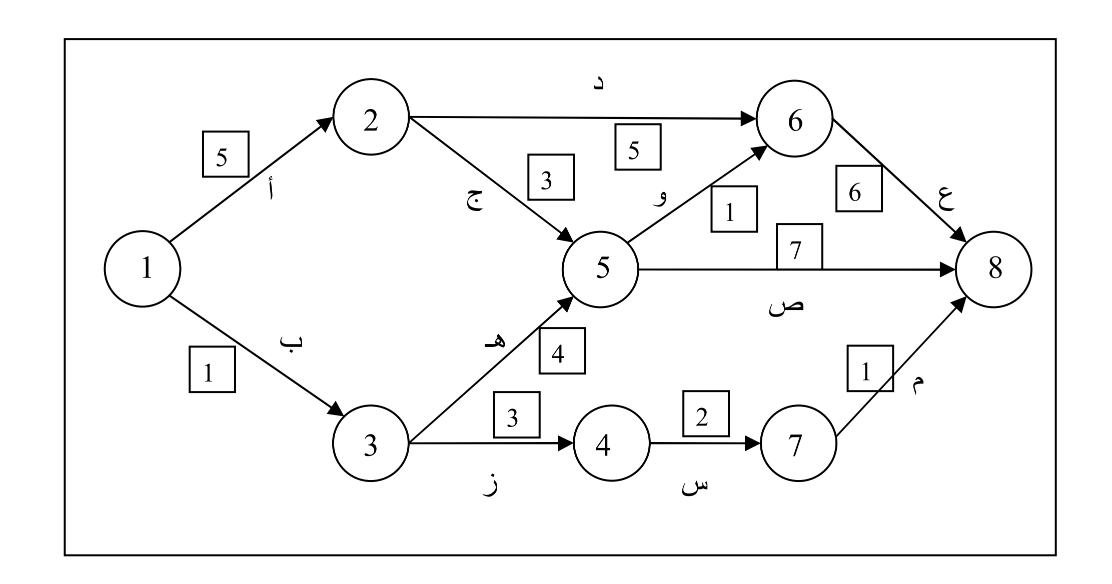
التحليل في جدول وبعد أن يتم إعداد الجداول التتابع الفني لعمليات تنفيذ المشروع يتم إعداد خريطة شبكية توضح هذا التتابع والأنشطة والأحداث المميزة له والأزمنة اللازمة لإنجاز كل نشاط من الأنشطة، وقد جرت العادة على تمثيل النشاط أو المهمة على الخريطة بسهم تقع قاعدته عند حدث بدء النشاط وتقع قمته عند حدث انتهاء النشاط، كما جرت العادة على تمثيل الأحداث بدوائر تربط الأنشطة.

مثال عن كيفية بناء الشبكة البيانية:-

مشروع لإنشاء مصنع إنتاجي يتضمن الأحداث والأنشطة في الجدول التالي:-

الأحداث	الأنشطة	الزمن/ أسبوع
1 – 2	أ	2
1 – 3	ب	1
2 – 5	ج	3
2 – 6	د	5
3 – 5	هـ	4
5 – 6	و	1
3 – 4	ز	3
4 – 7	س	2
5 – 8	ص	7
6 – 8	ع	6
7 - 8	م	1

المطلوب:- أرسم شبكة المشروع حسب تعاقب الأنشطة وبين وحدد المسار الحرج.



المسار الأول:-

(8-6) ← (6-2) ← (2-1)

2 + 5 + 6 = 13 أسبوع

المسار الثاني:-

(8-6) ← (6-5) ← (5-2) ← (2-1)

2 + 3 + 1 + 6 = 12 أسبوع

المسار الثالث:-

(8-5) ← (5-2) ← (2-1)

2 + 3 + 7 = 12 أسبوع

المسار الرابع:-

(8-6) ← (6-5) ← (5-3) ← (3-1)

1 + 4 + 1 + 6 = 12 أسبوع

المسار الخامس:-

(8-5) ← (5-3) ← (3-1)

1 + 4 + 7 = 12 أسبوع

المسار السادس:-

(8-7) ← (7-4) ← (4-3) ← (3-1)

1 + 3 + 2 + 1 = 7 أسابيع

إذن المسار الحرج (CPM) هو المسار (أ د ع) وهو أطول المسارات، ويقدر (13) أسبوعاً، يعرف المسار الحرج بأنه هو ذلك المسار على الخريطة والذي يشكل أطول الطرق بين الحادثة الابتدائية والحادثة النهائية، بحيث يمر بعدد من الحوادث المتتالية والتي تتصل في ما بينها بعدد من الأسهم الأنشطة، ويمثل المسار الحرج وقت الإنجاز المبكر للمشروع ككل.

أسلوب بيرت (PERT) تقييم ومراجعة البرامج :-

تستخدم طريقة برت (PERT) كأداة مساعدة لدراسة إمكانية تقصير المسار الحرج في الشبكة البيانية، ولمعرفة مدى الاحتياطي من الزمن الذي يمكن استغلاله في باقي المسارات غير الحرجة، ويستخدم من أجل هذا المعدل ثلاثة أنواع من التقديرات هي:-

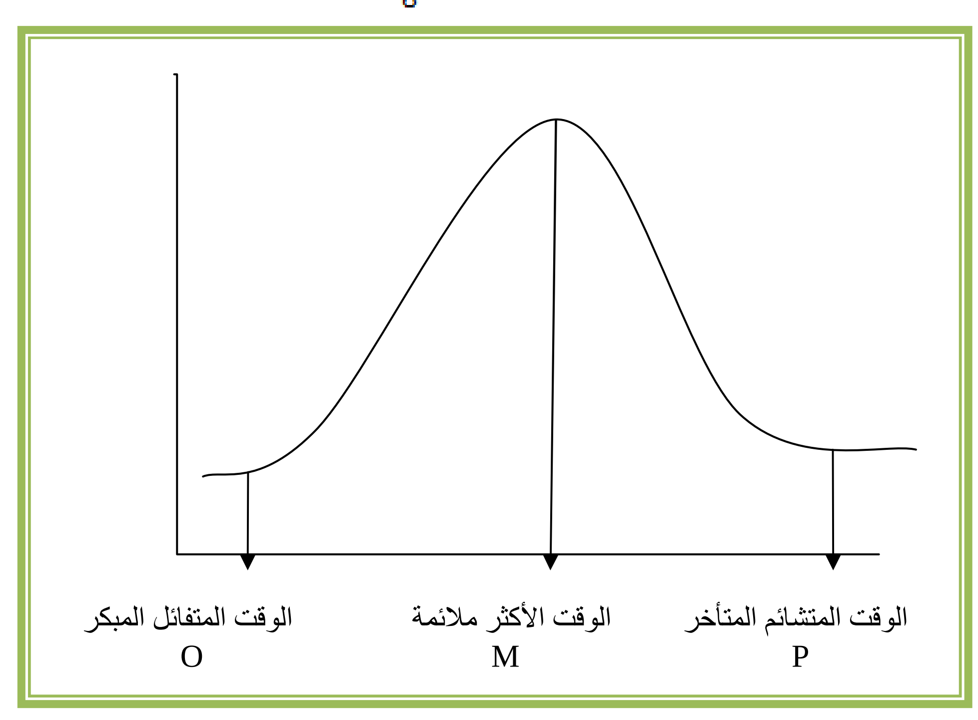
1- تقدير الوقت المتفائل وترمز له بالحرف (O) وهو الوقت المقدر للانتهاء من العمل من حادثتين مأخوذاً لحدوده الدنيا بحيث تكون جميع الشروط ملائمة لسير العمل دون أية عراقيل في التنقيذ.

2- تقدير الوقت الأكثر احتمالاً ويرمز له بالحرف (M) وهو الوقت اللازم للانتهاء من العمل من حادثتين مأخوذاً من خلال التجربة والممارسات.

3- تقدير الوقت المتشائم ونرمز له بالحرف (P) وهو الوقت اللازم للانتهاء من العمل من حادثتين باعتبار جميع الظروف السيئة التي يمكن أن تطرأ على المشروع أثناء القيام بالعمل.

الوقت المتوقع:-

يحدد المعدل العام لاستمرارية فترات العمل بين كل حادثتين من خلال مؤشر حيث يمكن أن نرمز له (T_{ij}) ويعبر هذا المؤشر عن التوقع الاستمرارية العمل بين الحادثة السابقة (i) والحادثة اللاحقة (j) ويقدر الوسط التوقعي بالمعادلة: $T_{ij} = \frac{O+4M+P}{6}$



$$(T_{ij}) = \frac{O + 4M + P}{6}$$

الوقت المتوقع

التباين المتوقع لاستمرارية العمل (T_{ij}) من خلال العلاقة

$$Var = \frac{(P - O)^2}{6}$$

الانحراف المعياري

$$S = \frac{P - O}{6}$$

ويمكن أن نجد عدداً من المؤشرات التي تستخدم بشكل واسع في تحليل الشبكات البيانية حسب أسلوب بيرت وهي:-

1- الوقت المبكر لبدء النشاط (EST): وهو الوقت المحدد لبدء النشاط الجديد بعد الانتهاء من الحوادث السابقة.

2- الوقت المبكر للانتهاء من النشاط (EFT): وهو الوقت المحدد للانتهاء من النشاط إذا كان قد بدأ في نفس الوقت المبكر لبدء العمل.

3- الوقت المتأخر لبدء النشاط (LST): وهو أخر وقت زمني يمكن فيه بدء العمل دون الإخلال بالوقت العام للمسار الحرج.

4- الوقت المتأخر من النشاط (LFT): وهو أخر وقت زمني يمكن لنا فيه الانتهاء من إنجاز العمل المؤدى إلى الحادثة وذلك دون الإخلال بالوقت العام للمسار الحرج.

5- الوقت المبكر للنشاط (ET): وهو الوقت الذي مضى على الإنشاء أو البضاعة حتى وصولها هذه الحادثة ويحسب الوقت المبكر من خلال العلاقة التالية:-

$$\mathbf{ET_{(ij)} = ET_{(ij)} + T_{(ij)}}$$

6- الوقت المتأخر للنشاط (LT): وهو الوقت الباقي للانتهاء من المشروع أو للانتهاء من العملية الإنتاجية ويحتسب من خلال العلاقة:

$$\mathbf{LT_{(ij)} = LT_{(ij)} + T_{(ij)}}$$

مثال كيفية استخدام أسلوب بيرت:-

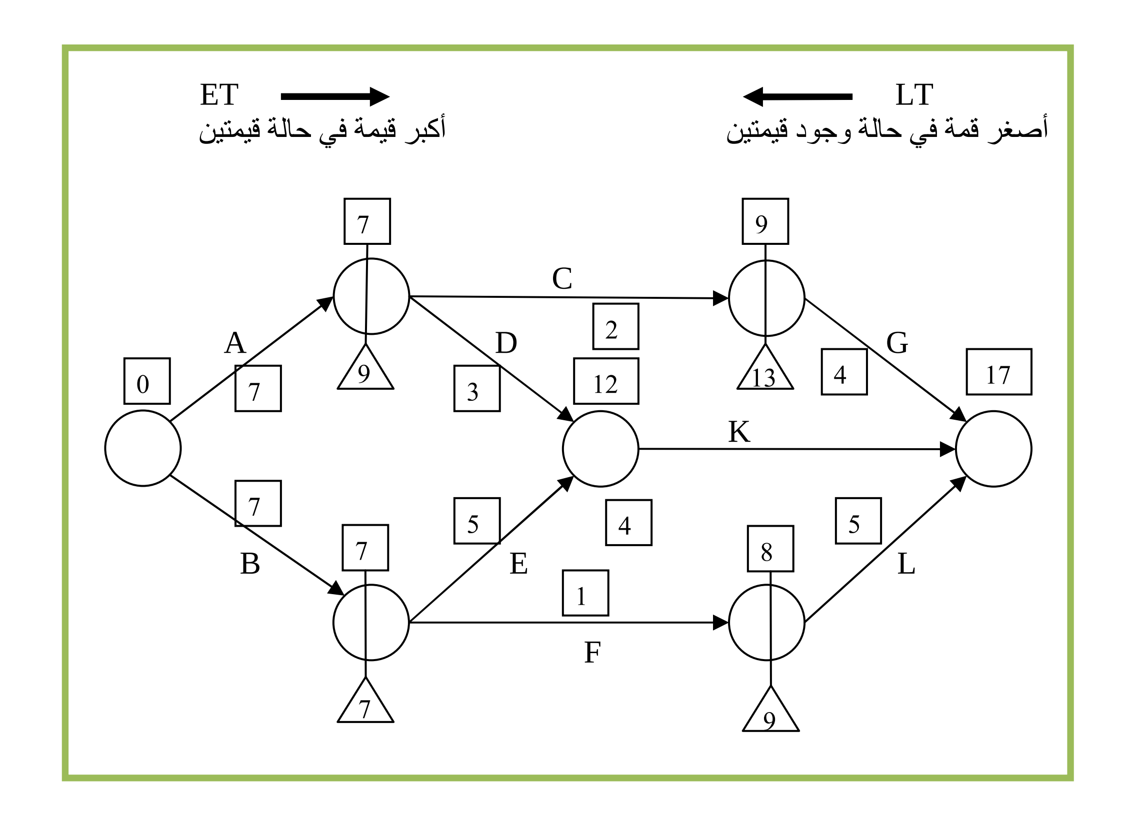
المعلومات التالية الموضحة بالجدول تبين الشبكة مشروع.

الأنشطة	الأنشطة السابقة لها	زمن الأنشطة		
		الوقت المتفائل (O)	الوقت الأكثر ملائمة (M)	الوقت المتأخر (P)
A	—	5	6	13
B	—	2	7	12
C	A	10.5	2	2.5
D	A	1	3	5
E	B	4	5	6
F	B	1	1	1
G	C	2	3	10
K	D E	4	5	6
L	F	3	5	7

1- أرسم الشبكة البيانية ووضح المسار الحرج على الشبكة.

2- أوجد المسار الحرج.

3- أوجد التباين والانحراف المعياري للمشروع.



الأنشطة	الأنشطة السابقة لها	النشاط المتوقع $T_{ij} = \frac{O+4M+P}{6}$	قيمة النشاط المتوقع	التباين $\frac{(P-O)^2}{6}$	الانحراف المعياري $\frac{P-O}{6}$
A	—	$A_{ij} = \frac{5+4\times 6+13}{6} = \frac{42}{6}$	7	1.7	1.3
B	—	$B_{ij} = \frac{2+4\times 7+12}{6} = \frac{42}{6}$	7	1.7	2.9
C	A	$C_{ij} = \frac{1.5+4\times 2+2.5}{6} = \frac{16}{6}$	2	0.16	0.03
D	A	$D_{ij} = \frac{1+4\times 2+5}{6} = \frac{18}{6}$	3	0.7	0.5
E	B	$E_{ij} = \frac{4+4\times 5+6}{6} = \frac{30}{6}$	5	0.3	0.09
F	B	$F_{ij} = \frac{1+4\times 1+1}{6} = \frac{6}{6}$	1	0	0
G	C	$G_{ij} = \frac{2+4\times 5+10}{6} = \frac{24}{6}$	4	1.3	1.7
K	D E	$K_{ij} = \frac{4+4\times 5+6}{6} = \frac{30}{6}$	5	0.3	0.09
L	F	$L_{ij} = \frac{3+4\times 5+7}{6} = \frac{30}{6}$	5	0.7	0.05

المسار الأول:-

G ← C ← A

7 + 2 + 4 = 13 أسبوع

المسار الثاني:-

K ← D ← A

7 + 3 + 5 = 15 أسبوع

المسار الثالث:-

K ← E ← B

7 + 5 + 5 = 17 أسبوع

المسار الرابع:-

L ← F ← B

7 + 1 + 5 = 13 أسبوع

إذن المسار الحرج أطول المسارات وهو المسار الثالث (K , E , B) يمثل أطول زمن هو (17) أسبوع.


نمـاذج من أسئلـــة مـــــادة
بحوث العمليات وحلولها
إعداد: أ. نصر ميلاد الطوق

محتويـــــات ملخص مادة بحوث العمليات

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى

الجامعـــة المفتـــوحة

أسئلة في مـادة بحوث العمليات

أجب عن أربع أسئلة فقط مما يأتي :

س1:1- أكتب مذكرات مختصرة عن ما يلي :

أ- أسلوب بيرت أو أسلوب تقييم ومراجعة البرامج

ب- أسلوب المسار الحرج

ج- نظرية المباريات

2- ما المقصود بمشكلة النقل ؟ وما هي الطرق التي يمكن استخدامها لإيجاد التوزيع الأمثل لمشـــكلة النقل ؟

3- عرف النموذج الثنائي مع شرح الخطوات التي يجب مراعاتها عند تحويل النموذج إلى نمـــوذج ثنائي.

4- اشرح ما المقصود بطريقة التحليل البياني وطريقة السيمبليكس ؟ وما هي مزايهما وعيوبهما .

س2: شركة الجنوب تقوم بإنتاج نوعين من التمور النوع يحقق ربحاً قدره ديناراً واحداً والثاني يحقــق ربحاً قدره ديناران والقيود أدناه تحد من قدرات إدارة الشركة على تحقيق هدفها في السعي لبلوغ أعلى ربح ممكن وهي كالآتي :

س$_1$ + 2س$_2$ $\leq$ 10

2س$_1$ + س$_2$ $\leq$ 8

شرط عدم السلبية س$_1$،س$_2$ $\geq$ 0

المطلوب :

1- حدد معادلة دالة الهدف .

2- ضع المشكلة في صورة مشكلة برمجة خطية لتقدير ما الذي يجب إنتاجه من النوعين باستخدام أسلوب التحليل البياني .

3- إيجاد عدد الساعات المستغلة والغير مستغلة وفي أي قيد إن وجدت .

4- ما هو المقدار الأمثل إذا تغيرت أرباح السلعتين بحيث يصبح النـــوع الأول (2 د.ل) والنـــوع الثاني بدينار واحد .

س3: أوجد الحل الأمثل للنموذج أدناه باعتماد طريقة السيمبليكس إذا كانت دالة الهدف

3س$_1$ + 2س$_2$ +5س$_3$ ⟵ تحقق أقصى ربح ممكن

3س$_1$ + 4س$_2$ +س$_3$ ≥ 120

2س$_1$ + س$_2$ + 2س$_3$ ≥ 110

س$_1$ + 3س$_2$ + 5س$_3$ ≥ 900

شرط عدم السلبية س$_1$،س$_2$،س$_3$ ≤ 0

س4: الجدول التالي يوضح تكلفة مشكلة نقل لمشروع ما .

	D_3	D_2	D_1	مراكز التوزيع / المخازن
10	5	1	2	01
25	3	4	7	02
20	4	2	6	03
55 / 55	22	18	15	

المطلوب :

1- هل مشكلة النقل في وضع متوازن ؟

2- أوجد بطريقة الأقل كلفة الحل المبدئي لهذه المشكلة ؟

3- أوجد تكلفة النقل الإجمالية لهذه المشكلة ؟

4- استخدم طريقة المسار المتعرج في إيجاد الحل الأمثل لهذه المشكلة .

س5: البيانات التالية تمثل الوقت التفاؤلي والوقت الأكثر احتمالاً والوقت التشاؤمي لمشروع معين مكون من مجموعة من النشاطات والفعاليات والموضحة بالجدول التالي :

ر.م	اسم النشاط	مسار النشاط	الأوقـــــــــات		
			المتفائل	الأكثر احتمالاً	المتشائم
1	أ	1-2	8	10	12
2	ب	2-3	6	8	16
3	ج	2-4	6	12	24
4	د	3-5	8	14	20
5	هـ	4-6	20	24	40
6	و	5-7	6	12	18
7	ز	6-7	12	18	30
8	ح	7-8	4	8	12

المطلوب :

1- احسب الوقت المتوقع لكل نشاط طبقاً لنموذج بيرت .

2- ارسم شبكة المشروع وفقاً لنموذج بيرت .

3- حدد المسار الحرج .

4- احسب التباين لكل نشاط .

5- احسب الإنحراف المعياري للمشروع ككل .

إجابة مادة بحوث العمليات

إجابة السؤال رقم (2) :

نفرض أن إنتاج النوع الأول من التمور ($س_1$)

وإنتاج النوع الثاني من التمور هو ($س_2$)

فإن دالة الهدف تصبح $س_1 + س_2$ ⟵ تحقق أكبر عائد ممكن = Max(z)

القيود :

$س_1 + 2س_2 \leq 10$ ⟵ (1)

$2س_1 + س_2 \leq 8$ ⟵ (2)

شرط عدم السلبية $س_1،س_2 \leq 0$

1- تحويل اللامتساويات إلى معادلات مكافئة :

$س_1 + 2س_2 = 10$ ⟵ (1)

$2س_1 + س_2 = 8$ ⟵ (2)

$س_1،س_2 \leq 0$ شرط عدم السلبية .

2- تحليل القيود :

القيد الأول $س_1 + 2س_2 = 10$

نفرض أن س = صفر

$2س_2 = 10$

$س_2 = \frac{10}{2} = 5$

($س_1$ ، $س_2$) = (صفر ، 5)

نفرض أن $س_2$ = صفر

$س_1 = 10$

($س_1$ ، $س_2$) = (10 ، صفر)

القيد الثاني :

$2س_1 + س_2 = 8$

نفرض أن $س_1$ = صفر

$س_2 = 8$

($س_1$ ، $س_2$) = (صفر ، 8)

نفرض أن $س_2$ = صفر

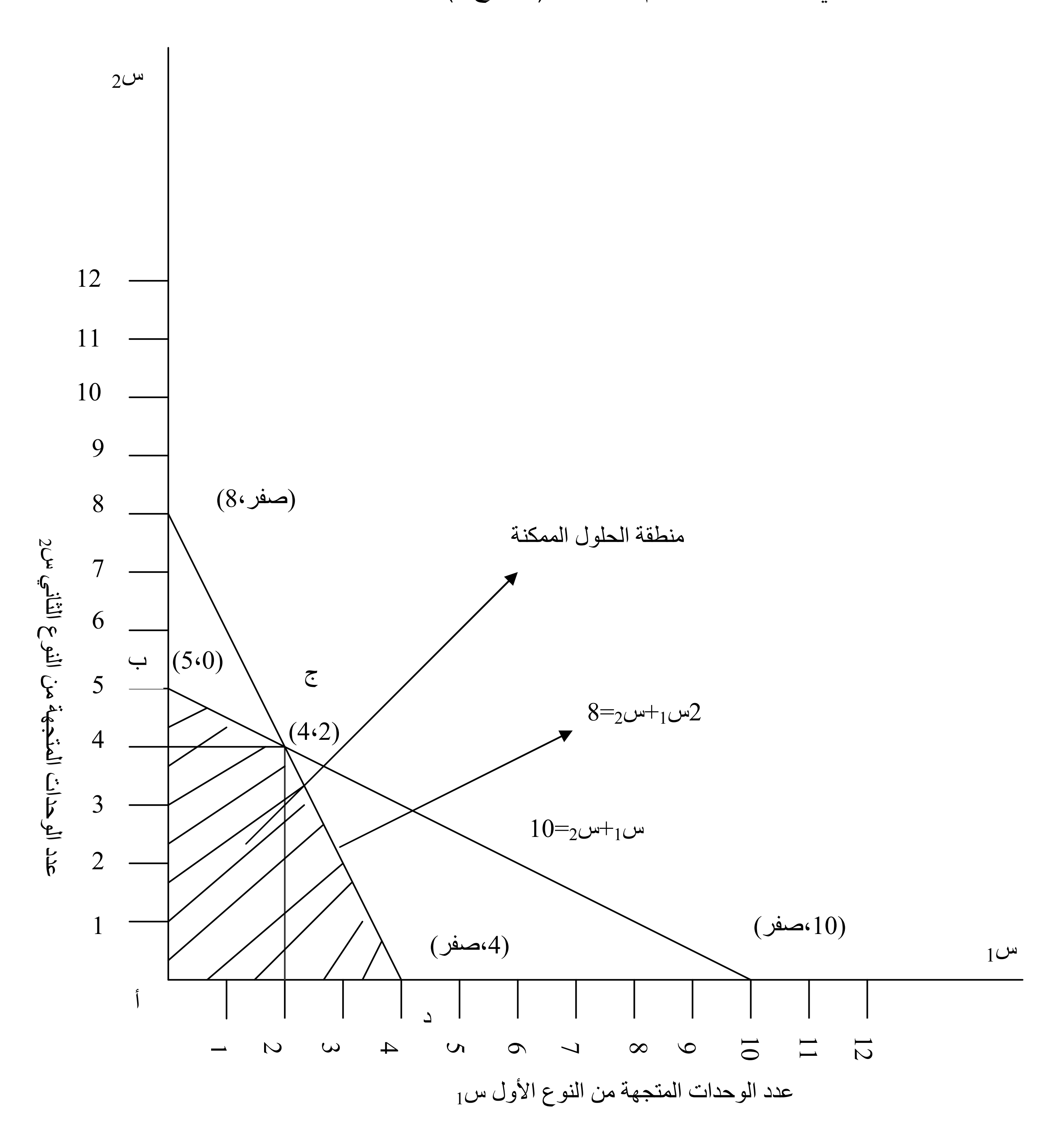
$2س_1 = 8$

$س_1 = \frac{8}{2} = 4$

($س_1$ ، $س_2$) = (4 ، صفر)

القيود	س1	س2
الأول	صفر	5
الأول	10	صفر
الثاني	صفر	8
الثاني	4	صفر

منطقة الحلول الممكنة هي الموضحة بالرسم بالمنطقة (أ،ب،ج،د)



يمكن إيجاد نقطة (ج) من الرسم من خلال إسقاط عمود من النقطة على المحور الأفقي والعمودي

$\begin{pmatrix} س_1 & س_2 \\ 2 \ ، & 4 \end{pmatrix}$ كما يمكن إيجاد نقطة (ج) حسابياً .

إيجاد النقطة (ج) رياضياً من خلال طرح المعادلتين :

$2س_1 + س_2 = 8$ ⟵ (1)

$س_1 + 2س_2 = 10$ ⟵ (2)

وبالتالي حتى تصبح عملية الطرح صحيحة لابد من ضرب المعادلة (1) في معامل ثابت وذلك لغرض التوحيد مع المعادلة رقم (2)

$4س_1 + 2س_2 = 16$ ⟵ (3)

$\underline{س_1 + 2س_2 = 10}$ ⟵ (2)

$3س_1 + صفر = 6$

$3س_1 = 6$

$س_1 = \frac{6}{3} = 2$

وبالتعويض عن قيمة $س_1$ في إحدى المعادلات السابقة نحصل على قيمة $س_2$:

$4س_1 + 2س_2 = 16$

بالتعويض عن قيمة $س_1 = 2$

$4 \times 2 + 2س_2 = 16$

$8 + 2س_2 = 16$

$2س_2 = 16 - 8$

$2س_2 = 8$

$س_2 = \frac{8}{2} = 4$

إذن $\begin{pmatrix} س_1 & س_2 \\ 2 \ ، & 4 \end{pmatrix}$

إذن جميع حدود المنطقة الحلول الممكنة تم تحديد إحداثياتها وهو المطلوب رقم (2) .

حدود منطقة الحلول الممكنة	إحداثيات حدود منطقة الحلول الممكنة	دالة الهدف $س_1+س_2$	قيمة دالة الهدف	
أ	(صفر،صفر)	1(صفر)+2(صفر)	صفر	
ب	(صفر،5)	1(صفر)+2(5)	10	← أفضل إنتاج
ج	(2،4)	1(2)+2(4)	10	← أفضل إنتاج
د	(4،صفر)	1(4)+2(صفر)	4	

إذن أفضل إنتاج يتحقق عند النقطتين هما (ب،ج) أما إنتاج عدد 5 وحدات من $س_2$ وعدم إنتاج من $س_1$ أية وحدة أو إنتاج مزيج من السلعتين عند نقطة (ج) إنتاج عدد(2) وحدة من $س_1$ وإنتاج عدد (4) وحدات من النوع الثاني $س_2$ ويحقق عائد في الحالتين مقداره 10 د.ل وبالتالي الشركة لها خيار أم إنتاج نوع واحد أو إنتاج النوعين .

3- إيجاد الساعات المستغلة والغير مستغلة وفي أي قيد إن وجدت :

أ- في حالة إنتاج عند نقطة (ب) وبالتالي فإن إحداثيات هذه النقطة هي (صفر،5) ويتم التعويض عنها في معادلات القيود :

القيد الأول :

$س_1 + 2س_2 = 10$

بالتعويض المباشر $0 + 2 \times 5 = 10$

$10 = 10$

لا يوجد أية ساعة غير مستغلة أي أن الوقت مستغل بالكامل

القيد الثاني :

$2س_1 + س_2 = 8$

$2(0) + 5 = 8$

$5 \neq 8$

وفي هذه الحالة وقت غير مستغل بواقع 3 ساعات في القيد الثاني $8 - 5 = 3$ ساعات فائض .

ب- في حالة إنتاج عند نقطة (ج) وبالتالي إحداثيات النقطة هي (2،4) ويتم التعويض في معادلات القيود :

القيد الأول :

$س_1 + 2س_2 = 10$

$2 + 2(4) = 10$

10 = 8 + 2

10 = 10 الوقت مستغل بالكامل

<u>القيد الثاني</u> :

2س$_1$ + س$_2$ = 8

2(2) + 4 = 8

4 + 4 = 8

8 = 8

وإذا كانت الشركة ترغب في إنتاج السلعتين عند نقطة (ب) سيكون هناك فائض من ساعات العمل في القيد الثاني وبواقع 3 ساعات أما إذا كانت ترغب في الإنتاج عند نقطة (ج) بأن في القيدين لا يوجد ساعات مستغلة أو غير مستغلة .

4- القرار الأمثل إذا تغيرت أرباح السلعتين تكون دالة الهدف :

دالة الهدف 2س$_1$ + س$_2$ ⟵ يحقق أكبر عائد = Max(z)

حدود منطقة الحلول الممكنة	إحداثيات حدود منطقة الحلول الممكنة	دالة الهدف 2س$_1$+س$_2$	قيمة دالة الهدف	
أ	(0،0)	2(0)+1	1	
ب	(5،0)	2(0)+1(5)	5	
ج	(2،4)	2(2)+1(4)	8	⟵ أفضل إنتاج
د	(4،صفر)	2(4)+1(صفر)	8	⟵ أفضل إنتاج

إذن أفضل إنتاج هو عند النقطتين هما (ج،د) ويحقق عائد في كل نقطة بولقع (8) وبالتالي فإن الشركة لها الخيار إما إنتاج عند نقطة (ج) أو (د) وكل منهما يحققان نفس العائد .

إجابة السؤال رقم (3) :

دالة الهدف :

3س$_1$ + 2س$_2$ + 5س$_3$ ⟵ تحقق أكبر عائد Max(z)

تعديل دالة الهدف بحيث تصبح :

3س$_1$ + 2س$_2$ + 5س$_3$ +0ص$_1$ +0ص$_2$ + 0ص$_3$ ⟵ تحقق أكبر عائد .

القيود :

3س$_1$ + 4س$_2$ + س$_3$ ≤ 120 ⟵ (1)

2س$_1$ +س$_2$ +2س$_3$ ≤ 110 ⟵ (2)

س$_1$ +3س$_2$ +5س$_3$ ≤ 900 ⟵ (3)

س$_1$،س$_2$،س$_3$ ≥ 0

تحويل اللامتساويات إلى معادلات مكافئة مع إضافة المتغير الفائض :

$$3س_1 + 4س_2 + س_3 + ص_1 = 120$$

$$2س_1 + س_2 + 2س_3 + ص_2 = 110$$

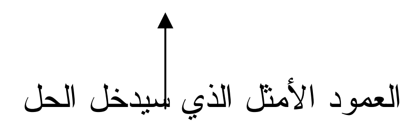
$$س_1 + 3س_2 + 5س_3 + ص_3 = 900$$

$$س_1، س_2، س_3، ص_1، ص_2، ص_3 \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} س_1 & س_2 & س_3 & ص_1 & ص_2 & ص_3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 110 \\ 900 \end{pmatrix}$$

الجدول المبدئي :

دالة الهدف م ن			3	2	5	0	0	0
ربح الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$
صفر	$ص_1$	120	3	4	1	1	0	0
صفر	$ص_2$	110	2	1	2	0	1	0
صفر	$ص_3$	900	1	3	5	0	0	1
رن		صفر	0	0	0	0	0	0
م ن–رن			3	2	5	صفر	صفر	صفر



وحيث أن الصف م ن – رن به قيم موجبة وصفر فإنه إمكانية تحسين الحل وذلك باختيار أكبر قيمة موجبة في العمود رقم $س_3$ حيث هذا العمود هو الذي سيدخل الحل ثم اختيار الصف الذي سيغادر الحل وهو الصف ($ص_2$) .

الجدول الأول :

دالة الهدف م ن			3	2	5	0	0	0
ربح الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$
5	$س_3$	55	1	1/2	1	0	1/2	0
صفر	$ص_1$	65	2	7/2	صفر	1	1/2−	صفر
صفر	$ص_3$	790	4−	1/2+	صفر	صفر	2/5−	1
رن		275	5	5/2	5	0	5/2	صفر
م ن−رن			2−	1/2−	صفر	صفر	5/2−	صفر

طريقة إيجاد قيم عناصر الصف $ص_1$:

قيم عناصر الصف القديم – (قيم عناصر الصف الجديد × نقطة ارتكاز الصف القديم)

120 − (55 × 1) = 120 − 55 = 65

3 − (1 ×1) = 3 − 1 = 2

4 − (1/2 × 1) = 4 − 1/2 = 3 1/2

1 − (1 × 1) = 1 − 1 = صفر

1 − (0 × 1) = 1 − 0 = 1

0 − (1/2 × 1) = 0 − 1/2 = −1/2

0 − (0 × 1) = 0 − 0 = صفر

طريقة إيجاد قيم عناصر الصف $ص_3$:

900 − (55 × 5) = 900 − 110 = 790

1 − (1× 5) = 1 − 5 = −4

3 − (1/2 × 5) = 3 − 5/2 = +1/2

5 − (1 × 5) = 5 − 5 = صفر

0 − (0 × 5) = 0 − 0 = 0

0 − (1/2 × 5) = 0 − 5/2 = −5/2

1 − (0 × 5) = 5 − 0 = 1

ويلاحظ من الجدول الأخير بأن الصف (م ن – رن) أصبح جميع القيم به صفرية وسالبة فإن الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل .

$$\begin{cases} س_3 = 55 \\ س_2 = 0 \\ س_1 = 0 \end{cases}$$

إجابة السؤال رقم (4) :

1) مشكلة النقل المعطاة في حالة التوازن يمكن إيضاح ذلك :

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = D_1 + D_2 + D_3$$

$$(10) + (25) + (20) = (15) + (18) + (22) = 55$$

كما أنه :

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = Q_1 = 10$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = Q_2 = 25$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = Q_3 = 20$$
$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = D_1 = 15$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = D_2 = 18$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = D_3 = 22$$

إذن طالما أن مجموع كمية المصادر تساوي مجموع الكمية المطلوبات في جميع مراكز التوزيع فـــإن المشكلة في وضع التوازن .

2-

المراكز / المخازن	D_1	D_2	D_3	
Q_1	2	1 / 10	5	10
Q_2	7 / 3	4	3 / 22	25
Q_3	6 / 12	2 / 8	4	20
	15	18	22	55 / 55

القاعدة القانونية $M + N - 1$

$(3) + (3) - 1 = 5$

إذن عدد الخلايا التي يتم التوزيع فيها (5)

$MinCost = (C_{12}X_{12}) + (C_{21}X_{21}) + (C_{31}X_{31}) + (C_{32}X_{32}) + (C_{23}X_{23})$

$(1\times10) + (7\times3) + (6\times12) + (2\times8) + (3\times22)$

$10 + 21\ 72 + 16 + 66 = 185$

المراكز / المخازن	D_1	D_2	D_3	
Q_1	[2] −3	[1]	[5] +2	10
Q_2	[7]	[4] +1	[3]	25
Q_3	[6]	[2]	[4] +2	20
	15	18	22	55 / 55

$Q_1D_1 = +2-1+2-6 = -3$

$Q_2D_2 = +4-2+6-7 = +1$

$Q_3D_3 = +4-3+7-6 = +2$

$Q_1D_3 = +5-1+2-6+2 = +2$

إذن الحل السابق لا يعتبر حلاً أمثل وإنه إمكانية تخفيض الكلفة .

ويمكن إعادة التوزيع مرة أخرى مع الأخذ في الاعتبار الخلايا السالبة عند التوزيع .

المراكز / المخازن	D_1	D_2	D_3	
Q_1	[2] 10	[1]	[5]	10
Q_2	[7]	[4] 3	[3] 22	25
Q_3	[6] 5	[2] 15	[4]	20
المجموع	15	18	22	55 / 55

$$MinCost = (C_{11}X_{11}) + (C_{21}X_{21}) + (C_{23}X_{23}) + (C_{31}X_{31}) + (C_{32}X_{32})$$
$$(2\times10) + (4\times3) + (3\times22) + (6\times5) + (2\times15)$$
$$20 + 12 + 66 + 30 + 30 = 158$$

وللتأكد يمكن استخدام إحدى الطرق الأخرى في التوزيع .

أولاً : طريقة الزاوية الشمالية الغربية :

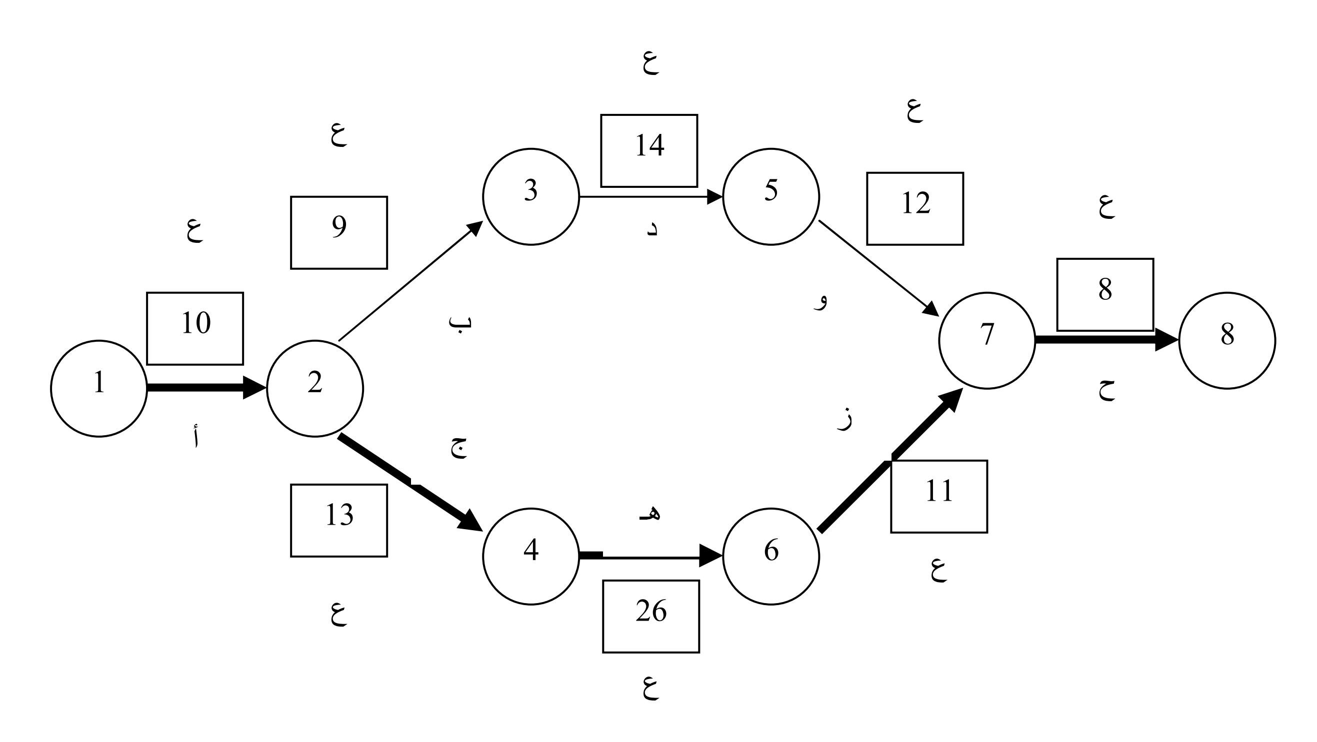
المراكز / المخازن	D_1	D_2	D_3	
Q_1	[2] 10	[1]	[5]	10
Q_2	[7] 5	[4] 18	[3] 2	25
Q_3	[6]	[2]	[4] 20	20
	15	18	22	55 / 55

$$MinCost = (2\times10) + (7\times5) + (4\times18) + (3\times2) + (4\times20)$$
$$20 + 35 + 72 + 6 + 80 = 213$$

ثانياً : طريقة فوجل التقريبية :

المراكز / المخازن	D_1	D_2	D_3	
Q_1	[2] 10	[1] –	[5] –	10
Q_2	[7] 3	[4] –	[3] 22	25
Q_3	[6] 2	[2] 18	[4] 0	20
	15	18	22	55 / 55

$$MinCost = (C_{11}X_{11}) + (C_{21}X_{21}) + (C_{23}X_{23}) + (C_{31}X_{31}) + (C_{32}X_{32})$$
$$(2\times10) + (7\times3) + (3\times22) + (6\times12) + (2\times18)$$
$$20 + 21 + 66 + 12 + 36 = 155$$



ر.م	اسم النشاط	المسار	الأوقـــــــــــــات ق	ح	م	الوقت المتوقع $\frac{ق+4ح+م}{6}$	الوقت المتوقع (ع)	المسار الأول	المسار الثاني
1	أ	2−1	8	10	12	$\frac{12+40+8}{6}$	10	10	10
2	ب	3−2	6	8	16	$\frac{16+32+6}{6}$	9	9	−
3	ج	4−2	6	12	24	$\frac{24+48+6}{6}$	13	−	13
4	د	5−3	8	14	20	$\frac{40+56+8}{6}$	14	14	−
5	هـ	6−4	20	24	40	$\frac{40+96+20}{6}$	26	−	26
6	و	7−5	6	12	18	$\frac{18+48+6}{6}$	12	12	−
7	ز	7−6	12	18	30	$\frac{30+72+12}{6}$	19	−	19
8	ح	8−7	4	8	12	$\frac{12+32+4}{6}$	8	8	8
								53	76

المسار الحرج ↓

3- المسار الحرج المؤشر عليه بعلامة ⟵ وهو أطول مسار والزمن الذي يستغرقه 76 أسبوع.

4- احسب التباين للنشاط الحرج :

ر.م	اسم النشاط	المسار	الأوقات ق	ح	م	التباين $\frac{م-ف}{6}$	التباين
1	أ	2-1	8	10	12	$\frac{12-8}{6} = \frac{4}{6}$	2/3
2	ج	4-2	6	12	24	$\frac{24-6}{6} = \frac{18}{6}$	3
3	هـ	6-4	20	24	40	$\frac{40-24}{6} = \frac{20}{6}$	10/3
4	ز	7-6	12	18	30	$\frac{30-12}{6} = \frac{18}{6}$	3
5	ح	8-7	4	8	12	$\frac{12-4}{6} = \frac{8}{6}$	4/3

5- الانحراف المعياري = $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (3)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + (3)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + 9 + \frac{100}{9} + 9 + \frac{16}{9}}$$

$$= \sqrt{0.444 + 9 + 11.11 + 9 + 1.778}$$

$$= \sqrt{31.333} = 5.598$$ تقريبا

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى

الجامعـــة المفتـــوحة

أسئلة في مـادة بحوث العمليات

أجب عن أربع أسئلة فقط مما يأتي :

س1– وضح مفهوم الأساليب الكمية كمدخل لصنع القرارات الإدارية، وتكلم عن مراحل التحليل الكمي.

س2– أوجد الحل الأمثل للنموذج أدناه باعتماد طريقة السمبلكس :

$4\text{س}_1+2\text{س}_2+3\text{س}_1$ ←———— تحقيق أقل كلفة ممكنة .

القيود :

$\text{س}_1+2\text{س}_2 \geq 15$

$\text{س}_1+2\text{س}_3 \geq 10$

$2\text{س}_1+\text{س}_2 \geq 20$

$\text{س}_1،\text{س}_2،\text{س}_3 \geq$ صفر

س3– الشركة العامة للكهرباء ثلاث مراكز لتوليد الطاقة موزعة في طرابلس، الجفارة، الزاوية، وهناك مصادر لتجهيز المادة الخام على أساس دفعات سنوية حسب قدرة مراكز التجهيز وحاجة مراكـــز التوليد وعدد الدفعات التي تستطيع مراكز التجهيز تحقيقها في السنة مبينة أدناه .

مركز التجهيز الأول 300 دفعة .

مركز التجهيز الثاني 400 دفعة .

مركز التجهيز الثالث 200 دفعة .

والحاجة السنوية لمراكز توليد الطاقة من المادة الخام كما يلي :

مركز طرابلس 200 دفعة .

مركز الجفارة 300 دفعة .

مركز الزاوية 400 دفعة .

والجدول التالي يبين كلفة الدفعة "بالدينار" المنقولة من مراكز التجهيز إلى مصانع التوليد كما يلي :

مراكز توليد الطاقة / مراكز تجهيز الفحم	طرابلس	الجفارة	الزاوية
مركز التجهيز الأول	200	300	200
مركز التجهيز الثاني	100	100	300
مركز التجهيز الثالث	300	200	100

المطلوب :

اعتمد أسلوب النقل من أجل الحصول على أقل تكلفة سنوية وذلك من خلال :

1- طريقة فوجل التقريبية لتحديد الحل الأمثل .

2- طريقة الوطئ على الحجر للوصول إلى الحل الأمثل .

س4- يوجد أربع أشخاص لإنجاز ثلاث أعمال والجدول الآتي يبين الوقت بالساعة لإنجاز أي عمل من الأعمال الثلاث :

الأعمال / الأشخاص	1	2	3
أحمد	12	12	20
محمد	10	12	24
زيد	15	15	24
عمر	13	14	25

المطلوب : اعتمد طريقة الحل المختصر للوصول إلى أقصر وقت ممكن لإنجاز الأعمال أعلاه .

س5- المعلومات التالية تخص بناء مشروع معين :

المسار	النشاط	الوقت اللازم للإنجاز بالأشهر
2-1	أ	3
3-2	ب	2
4-2	ج	5
5-3	د	3
5-4	هـ	2

المطلوب:

1- أرسم شبكة العمل حسب تعاقب العمليات أعلاه.

2- تحديد عدد المسارات والوقت اللازم بالأشهر لكل مسار.

3- تحديد المسار الحرج وتوضيحه.

إجابة مادة بحوث العمليات

إجابة السؤال رقم (2) :

تحويل النموذج من متباينات إلى معادلات بطرح المتغير الفائض وتعديل دالة الهدف وإضـــافة متغيـــر اصطناعي إلى القيود وتعديل دالة الهدف بإظهار هذه المتغيرات بأكبر كلفة يرمز لها بحرف (م) بحيث تصبح :

4س$_1$+2س$_2$+3س$_3$+صفرص$_1$+صفرص$_2$+صفرص$_3$+م ع$_1$+م ع$_2$ + م ع$_3$ ←——تحقق أقل كلفة ممكنة .

تحويل اللامتساويات إلى معادلات مكافئة مع إجراء تعديلات عليها وتصبح كالآتي :

س$_1$+2س$_2$−ص$_1$+ع$_1$=15

س$_1$+2س$_3$−ص$_2$+ع$_2$=10

2س$_1$+س$_2$−ص$_3$+ع$_3$=20

س$_1$،س$_2$،س$_3$،ص$_1$،ص$_2$،ص$_3$، ع$_1$، ع$_2$، ع$_3$ ≥ 0

س$_1$	س$_2$	س$_3$	ص$_1$	ص$_2$	ص$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$		
1	2	0	−1	0	0	1	0	0	=	15
1	0	2	0	−1	0	0	1	0		10
2	1	0	0	0	−1	0	0	1		20

الجدول المبدئي :

تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ص$_1$	ص$_2$	ص$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
دالة الهدف م ن			4	2	3	0	0	0	م	م	م
م	ع$_1$	15	1	2	0	−1	0	0	1	0	0
م	ع$_2$	10	1	0	2	0	−1	0	0	1	0
م	ع$_3$	20	2	1	0	0	0	−1	0	0	1
رن		45 م	4 م	3 م	2 م	−م	−م	−م	م	م	م
م ن−رن			4−4م	2−3م	3−2م	+م	+م	+م	0	0	0

نهاية الجدولة المبدئية

عمود الارتكاز

الجدولة الثانية :

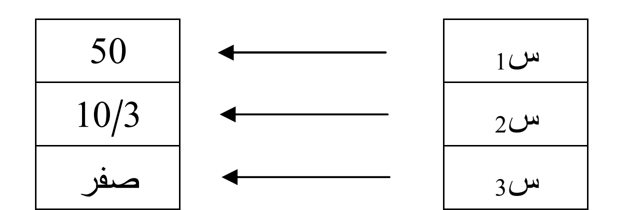
دالة الهدف م ن			4	2	3	0	0	0	م	م	م
تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
4	$س_1$	10	1	1/2	صفر	صفر	صفر	1/2−	0	صفر	1/2
م	$ع_1$	5	0	3/2	صفر	1−	صفر	1/2	1	صفر	1/2−
م	$ع_2$	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
رن		5+40م	4	2+3/2م	صفر	−م	صفر	1/2م−2	م	صفر	1/2−2م
م ن−ر ن			صفر	−3/2م	3	+م	صفر	1/2م+2	صفر	م	1/2م+2

عمود الارتكاز ↑ (عمود $س_2$)

الجدولة الثالثة :

دالة الهدف م ن			4	2	3	0	0	0	م	م	م
تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
4	$س_1$	50	1	صفر	صفر	1/3	صفر	2/3−	1/3−	صفر	2/3
2	$س_2$	10/3	صفر	1	صفر	2/3−	صفر	1/3	2/3	صفر	1/3−
م	$ع_2$	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
رن		620/3	4	2	صفر	صفر	صفر	2−	صفر	صفر	2
م ن−رن			صفر	صفر	3	صفر	صفر	2+	م	م	م−2

يلاحظ من الجدوالة أعلاه أن كافة قيم صف التقييم (م ن−رن) هي صفر أو أكبر من صفر (قيم موجبة) ويمكن وضع الحل الأمثل



فرق الصفوف(3)	فرق الصفوف(2)	فرق الصفوف(1)	مراكز توليد الطاقة / مراكز التجهيز	مركز طرابلس	مركز الجفارة	مركز الزاوية	المجموع
200−200 صفر	200−200 صفر	300−200 100	مركز التجهيز الأول	200 / 100	300 / 0	200 / 200	300
300−100 ← 200	300−100 200	300−100 ← 200	مركز التجهيز الثاني	100 / 100	100 / 300	300 / 0	400
	300−100 ← 200	200−100 100	مركز التجهيز الثالث	300 / 0	200 / 0	100 / 200	200
			المجموع	200	300	400	900 / 900
			فرق الأعمدة(1)	200−100 100	200−100 100	200−100 100	
			فرق الأعمدة (2)	200−100 100	_	200−100 100	
			فرق الأعمدة (3)	200−100	_	300−200 100	

(1) تكلفة النقل = (100×200)+(200×200)+(100×100)+(100×300)+(100×200)

= (20.000)+(40.000)+(10.000)+(30.000)+(20.000)=(120.000) بالدينار .

(2) تقويم الخلايا الفارغة :

1− خلية(المركز الأول، مركز توليد جفارة)

2− خلية(المركز الثاني، مركز توليد الزاوية)

3− خلية(المركز الثالث، مركز توليد طرابلس)

4− خلية(المركز الثالث، مركز توليد جفارة)

1− خلية الفارغة (المركز الأول، مركز توليد جفارة) = 300+

200−

100+

100−

100+

2- خلية الفارغة (المركز الثاني، مركز توليد الزاوية) = +300

-200

+200

-100

+200

3- خلية الفارغة (المركز الثالث، مركز توليد طرابلس) = +300

-100

+200

-200

+200

4- خلية الفارغة (المركز الثالث، مركز توليد جفارة) = +200

-100

+200

-200

+100

-100

+100

مراكز التجهيز / مركز توليد الطاقة	مركز طرابلس	مركز الجفارة	مركز الزاوية	المجموع
مركز التجهيز الأول	200 / 100	300 / +100	200 / 200	300
مركز التجهيز الثاني	100 / 100	100 / 300	300 / +200	400
مركز التجهيز الثالث	300 / +200	200 / +100	100 / 200	200
المجموع	200	300	400	900 / 900

نستنتج من التوزيع بأن الحل الأمثل بطريقة الوطئ على الحجر هي نفسها بطريقة فوجل التقريبيــة لأن الخلايا الفارغة لا تخفض أي قيمة للوحدة الواحدة وأن تكاليف النقل السنوية تعادل 120.000 دينار

إجابة السؤال الرابع :

1- إضافة عمود جديد كلي تتساوى الصفوف مع الأعمدة .

2- طرح أصغر قيمة في كل صف وحيث أن أصغر قيمة هي (صفر) فإن الجدول لا يتغير ويبقى كما هو عليه.

الأعمال / الأشخاص	1	2	3	4
أحمد	12	12	20	صفر
محمد	10	12	24	صفر
زيد	15	15	24	صفر
عمر	13	14	25	صفر

3- طرح أصغر قيمة في كل عمود .

4- يخصص الصف أو العمود الذي به (صفراً واحداً) أي أن العمود رقم (1) يُخصص إلى العامل محمد والعمود رقم (3) يُخصص إلى العامل أحمد .

الأعمال / الأشخاص	1 ↓	2	3 ↓	4
أحمد	2	صفر	[صفر]	صفر
محمد	[صفر]	صفر	4	صفر
زيد	5	3	4	صفر
عمر	3	(2)	5	صفر

5- نختار أصغر قيمة غير معطاة من القيم الموجودة بالجدول وهي رقم (2) ونطرحها من القيم الأخرى ويتم إضافتها إلى خلايا التقاطع وهو كما هو مبين في الجدول التالي :

الأعمال / الأشخاص	1	2	3	4
أحمد	صفر	صفر	صفر	صفر
محمد	صفر	صفر	6	2
زيد	3	1	4	صفر
عمر	1	صفر	5	صفر

وبالتالي نحصل على الجدول التالي :

الأعمال / الأشخاص	1	2	3	4
أحمد	صفر	صفر	صفر	صفر
محمد	صفر	صفر	6	2
زيد	3	1	4	صفر
عمر	1	صفر	5	صفر

وإن أقصر وقت ممكن لإنجاز الأعمال كالآتي :

1- أحمد ينجز العمل رقم (3) بواقع (20) ساعة .

2- محمد ينجز العمل رقم (1) بواقع (10) ساعات .

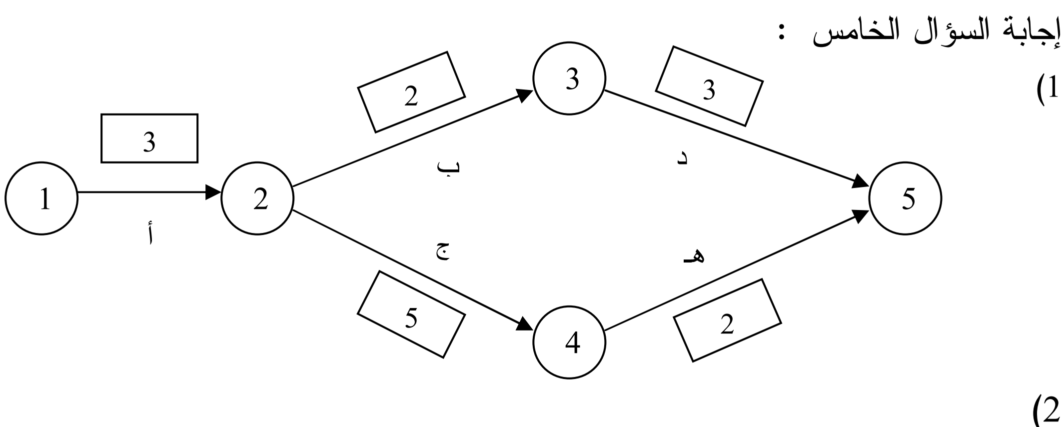
3- عمر ينجز العمل رقم (2) بواقع (14) ساعة .

4- زيد يستبعد من إنجاز أي عمل (-)

44 ساعة

إجابة السؤال الخامس :

1)



2)

المسار الأول : (1-2) ⟵ (2-3) ⟵ (3-5)

أ + ب + د

3 + 2 + 3 = 8 أشهر

المسار الثاني : (1-2) ⟵ (2-4) ⟵ (4-5)

أ + ج + هـ

3 + 5 + 2 = 10 شهر

3) المسار الحرج هو أطول وقت ممكن لإنجاز المشروع وهو يمثل المسار :

(1-2) ⟵ (2-4) ⟵ (4-5)

أ + ج + هـ

3 + 5 + 2 = 10 شهر

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى

الجامعـــة المفتـــوحة

أسئلة في مـادة بحوث العمليات

أجب عن أربع أسئلة فقط مما يأتي :

س1: مصنع صغير يقتصر إنتاجه على سلعتين، ويمر الإنتاج على ثلاثة مراحـــل إنتاجيـــة متتاليـــة،
المعلومات المتوفرة لدى المصنع هي كالآتي :

دالة الهدف 5 س + 8 ص ←——— يحقق أكبر قيمة ممكنة

المرحلة الأولى 2 س + 2 ص ≥ 120

المرحلة الثانية س ≥ 50

المرحلة الثالثة ص ≥ 40

شروط عدم السلبية س،ص ≤ 0

المطلوب :

أ) أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة التحليل البياني ؟

ب) هل يوجد ساعات غير مستغلة وفي أية معادلة إن وجدت ؟

س2: إذا توفرت لديك المعلومات التالية :

دالة الهدف 3 س+4 ص ←——— يحقق أقل تكلفة ممكنة

القيود س + ص ≤ 3

س + 2 ص ≤ 2

شروط عدم السلبية س،ص ≤ 0

المطلوب :

أ) أوجد الجدول المبدئي الأولي فقط حسب طريقة السيمبلكس (الطريقة المبسطة)

ب) استخدم إجراءات النموذج المقابل لتغيرها إلى أكبر قيمة ممكنة

س3: مشروع معين له ستة أنشطة وهي كالآتي :

الأنشطة	أ	ب	ج	د	هـــ	و
الأنشطة السابقة لها	–	أ	أ	ب جـــ	جـــ	د هـــ
الزمن / أسبوع	2	4	5	3	4	2

المطلوب :

أ) بناء الشبكة البيانية وتحديد المسار الحرج

ب) حساب الوقت المبكر والمتأخر والفائض لهذه المشكلة

س4: تحدث عن كل من :

أ) مفهوم الأساليب الكمية

ب) الأساليب الكمية وبناء النماذج

ج) مراحل التحليل الكمي

س5: أكتب مذكرات مختصرة عن كل من :

أ) مشاكل النقل والنماذج المستخدمة لإيجاد الحل الأمثل

ب) نظريات المباريات

إجابة مادة بحوث العمليات

إجابة السؤال الأول :

دالة الهدف 5 س + 8 ص ⟵ تحقق أكبر قيمة ممكنة

القيود : 2 س + 2 ص ≥ 120

س ≥ 50

ص ≥ 40

س،ص ≤ 0

1) تحويل اللامتساويات إلى معادلات مكافئة بحيث تصبح القيود على النحو التالي :

2 س + 2 ص = 120 ⟵ (1)

س = 50 ⟵ (2)

ص = 40 ⟵ (3)

س،ص ≤ صفر

2) رسم مخطط بياني يتكون من محورين وكل محور يمثل المتغيرات الأساسية في اتخاذ القرار (س،ص) من خلال الرسم نصل إلى تحديد منطقة الحلول الممكنة وبما أن (س،ص) أكبر أو تساوي الصفر فإننا سنأخذ بعين الاعتبار فقط الحلول التي تحقق هذين المتغيرين ومن أجل رسم خطوط معادلات النموذج يتطلب معرفة قيم هذين المتغيرين بدلالة إحداهما .

- رسم خط دالة القيد الأول

2 س + 2 ص = 120 ⟵ (1)

نفرض أن س = صفر

2 ص = 120

ص = $\frac{120}{2}$ = 60

س	ص
س	60

كما نفرض أن ص = صفر

2 س = 120

س = $\frac{120}{2}$ = 60

س	ص
60	صفر

- رسم خط دالة القيد الثاني

س = 50

س	ص
50	صفر

- رسم خط دالة القيد الثالث

ص= 40

س	ص
صفر	40

س	ص
القيد الأول صفر	60
60	صفر
القيد الثاني 50	صفر
القيد الثالث صفر	40

والآن يوجد لدينا ثلاثة مخططات وكلاً منهما يعطي حلاً ممكناً للمزيج الإنتاجي وفقاً إلى المحددات الثلاثة ولكي نصل إلى الحل الأمثل، يتطلب رسم خطوط الدوال على مخطط بياني واحد من خلاله يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة والشكل التالي يوضح ذلك من خلال جدوالة المحددات السابقة ومن خـــلال الشكل نلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المحصورة والمظللة (E،D،C،B،A) حيث أن هذه المنطقة تحدد بأن الشركة تحقق عائد على حدودها أو بداخلها وأن حدودها معلومة عدا نقطـــة (D،C) يتطلب إيجاد الإحداثيات لهما، وهناك طريقتين إما من خلال الرسم فـــإن نقطـــة C تكـــون حـــدودها (40،20) ونقطة D يكون حدودها (50،20) .

كذلك يمكن إيجاد حدود كل من (س،ص) رياضياً وذلك من خلال طرح المنحنيات المتقاطعة .

2 س + 2 ص = 120 ⟵ (1)

ص = 40 ⟵ (3)

وبضرب طرفي المعادلة رقم (3) في معامل ثابت وهو (2)

2 س + 2 ص = 120 ⟵ (1)

2 ص = 80 ⟵ (3) بالطرح

2 س = 40

س = $\frac{40}{2}$ = 20

بالتعويض في أحد المعادلات السابقة عن قيمة س لإيجاد قيمة ص عندما س = 20

2 × 20 + 2 ص = 120

40 + 2 ص = 120

2 ص = 120 − 40

2 ص = 80

ص = $\frac{80}{2}$ = 40

إذن إحداثي النقطة C = (40،20)

إيجاد حدود النقطة D

2 س + 2 ص = 120 ⟵ (1)

س = 50 ⟵ (2)

بضرب طرفي المعادلة رقم (2) في معامل ثابت (2)

2 س + 2 ص = 120

2 س = 100 بالطرح

2 ص = 20

ص = $\frac{20}{2}$ = 10

وبالتعويض في إحدى المعادلات السابقة يمكن إيجاد قيمة س بدلالة ص عندما ص = 10

2 س + 2 ص = 100

2س +2(10) =100

2 س + 20 = 100

2 س = 100 − 20

2 س = 80

س = $\frac{80}{2}$ = 40

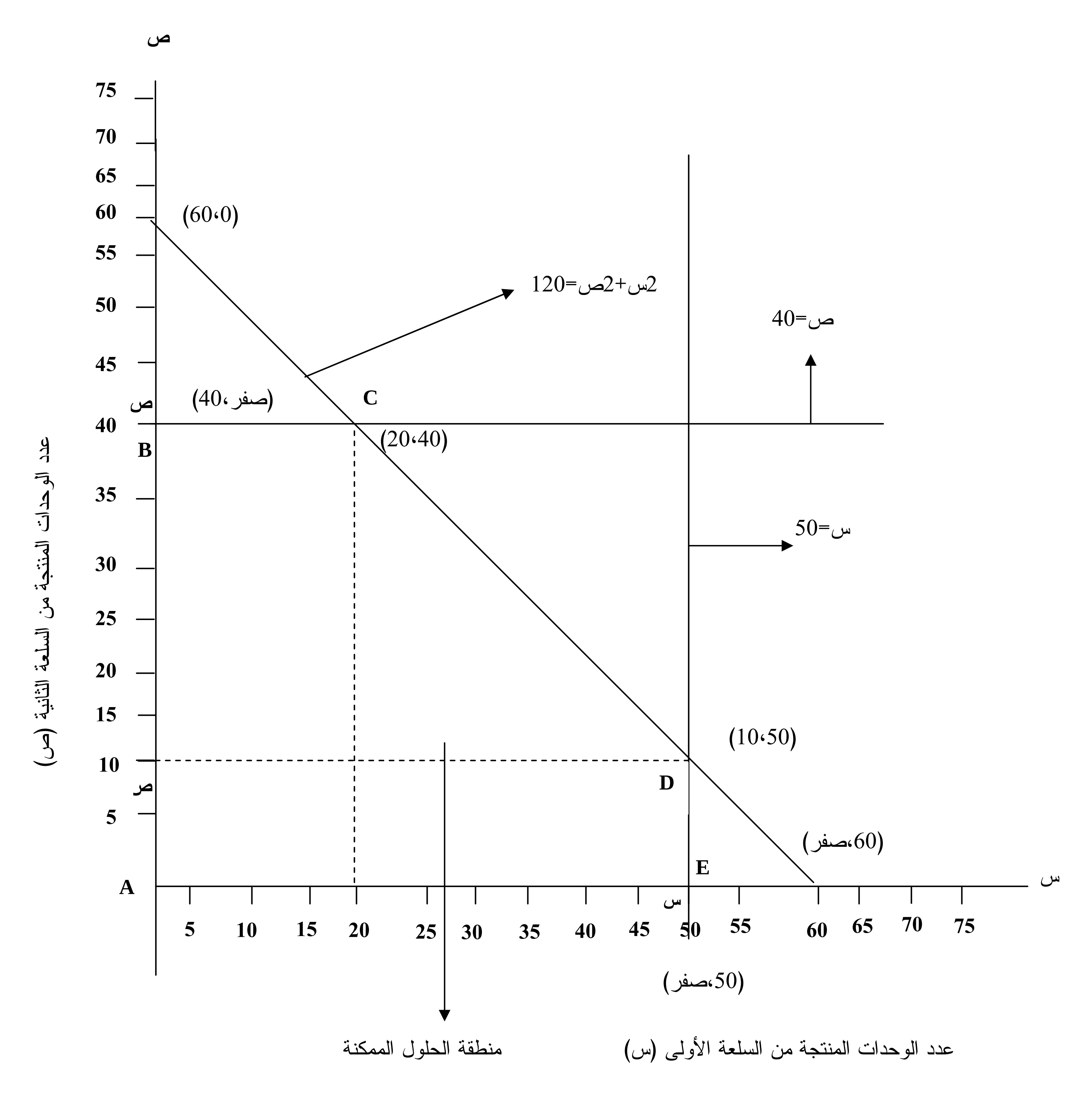
إذن إحداثي النقطة D = (50،10)

وبهذا يمكن تحديد منطقة الحلول الممكنة في المساحة المحصورة في (A،B،C،D،E)

حدود منطقة الحلول الممكنة	إحداثيات (س،ص)	دالة الهدف 5 س + 8 ص	قيمة دالة الهدف
A	(صفر،صفر)	5(0) + 8(0)	صفر
B	(صفر،40)	5(0)+8(40)	320
C	(20،40)	5(20)+8(40)	420
D	(50،10)	5(50) + 8(10)	330
E	(50،صفر)	5(50) + 8(0)	250

أكبر عائد ⟵ (C)

ومن خلال ما ذكر أعلاه يتضح بأن أقصى ربح يمكن أن يحققه المصنع الصـــغير هـــو 420 د.ل يكون المزيج السلعي اللازم لتحقيق هذا الربح هو إنتاج (20 وحدة) من س وإنتاج (40 وحدة) من ص وهو المطلوب .



<u>إيجاد الساعات الغير مستغلة وفي أي قيد إن وجدت</u>

حيث أن أفضل نقطة يمكن أن ينتج فيها المصنع الصغير هو عند النقطة C والتي تمثل أكبر عائد يمكن يحققه المصنع وبالتعويض عن قيمة أفضل نقطة في المعادلات المكافئة التي يتم تحديدهم سابقاً :

2 س + 2 ص = 120 ⟵ (1)

س= 50 ⟵ (2)

ص =40 ⟵ (3)

وبالتعويض في المعادلة رقم (1) عندما (20،40)

2 س + 2 ص = 120

2(20) + 2(40) = 120

إذن الطاقة مستغلة بالكامل لا يوجد ساعات فائضة .

بالتعويض في المعادلة رقم (2) عندما (20،40)

س = 50

إذن الطاقة غير مستغلة ويوجد ساعات فائضة .

بالتعويض في المعادلة رقم 3 عندما (20،40)

ص = 40

إذن الطاقة مستغلة بالكامل لا يوجد ساعات فائضة .

إجابة السؤال رقم (2) :

دالة 3 س +4 ص ⟵ يحقق أقل كلفة ممكنة

تحويل النموذج من اللامتساويات إلى معادلات مكافئة وذلك بطرح المتغير الفائض وإضافة المتغير الاصطناعي إلى القيود وتعديل دالة الهدف بإظهار هذه المتغيرات بأكبر كلفة ويرمز لها بحرف (م) بحيث تصبح دالة الهدف

3 س + 4 ص +صفر ص$_1$ + صفر ص$_2$ + م ع$_1$ +م ع$_2$ ⟵ تحقق أقل كلفة ممكنة

تحويل اللامتساويات إلى معادلات مكافئة مع إجراء تعديلات عليها وتصبح كالآتي :

س + ص = 3 ⟵ (1)

س +2 ص = 2 ⟵ (2)

س،ص ≤ 0

يتم إضافة المتغير الاصطناعي وطرح المتغير الفائض

س + ص− ص$_1$ + ع$_1$ = 3 ⟵ (1)

س + 2 ص− ص$_2$ + ع$_2$ = 2 ⟵ (2)

س،ص،ص$_1$،ص$_2$،ع$_1$،ع$_2$ ≤ صفر

س	ص	ص$_1$	ص$_2$	ع$_1$	ع$_2$
1	1	1−	0	1	0
1	2	0	1−	0	1

الجدولة المبدئية :

دالة الهدف م ن			3	4	صفر	صفر	م	م	
تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	س	ص	ص$_1$	ص$_2$	ع$_1$	ع$_2$	
م	ع$_1$	3	1	1	1−	0	1	0	3/1=3
م	ع$_2$	2	1	2	0	1−	0	1	2/2=1 ⟵ الصف الذي يغادر الحل
رن		5م	2م	3م	−م	−م	م	م	
م ن−رن			3−2م	4−3م	+م	+م	صفر	صفر	
الصف التقييمي م =(10)			−17	−26	+10	+10	صفر	صفر	

↑ العمود الأمثل أكبر قيمة بالسالب

الجدولة الأولى :

دالة الهدف م ن			3	4	صفر	صفر	10	10
تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	س	ص	$ص_1$	$ص_2$	$ع_1$	$ع_2$
4	ص	1	1/2	1	0	1/2−	0	1/2
10	$ع_1$	2	1/2	0	1−	1/2	1	1/2−
رن		24	7	4	10−	3+	10	3−
م ن−رن			4−	صفر	10+	3−	صفر	7

الصف الذي يغادر الحل

1/1/2=2
2/1/2=4

العمود الأمثل يمثل أكبر قيمة سالبة

الجدولة الثانية :

دالة الهدف م ن			3	4	صفر	صفر	10	10
تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	س	ص	$ص_1$	$ص_2$	$ع_1$	$ع_2$
3	س	2	1	2	0	1−	0	1
10	$ع_1$	1	صفر	1−	1−	1	1	1−
رن		16	3	4−	10−	7+	10	7−
م ن−رن			صفر	8+	10+	7−	صفر	3

الصف الذي يغادر الحل

1/2=2-
1/1=1

العمود الأمثل أكبر قيمة سالبة

الجدولة الثالثة :

دالة الهدف م ن			3	4	صفر	صفر	10	10
تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	س	ص	$ص_1$	$ص_2$	$ع_1$	$ع_2$
صفر	$ص_2$	1	0	1−	1−	1	1	1−
3	س	3	1	1	1−	0	1	2
رن		9	3	3	3−	صفر	3	6
م ن−رن			صفر	1	3+	صفر	7	4

ملاحظة عامة :

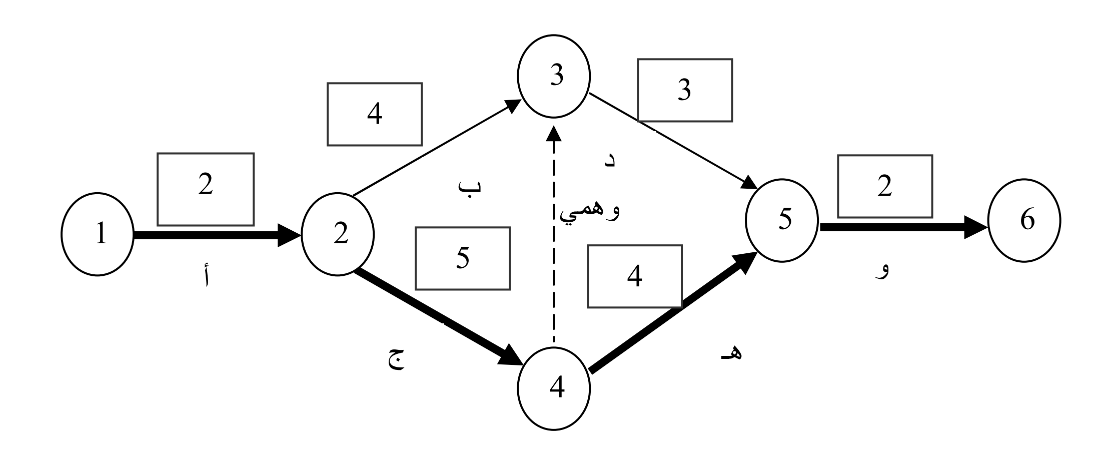
في جميع الحالات لإيجاد الصف الجديد يتم قسمة قيم عناصر الصف على نقطة ارتكاز العمود أما في حالة إيجاد الصفوف الأخرى متتالية ويتم تطبيق القاعدة القانونية :

الصف الجديد = قيم عناصر الصف القديم – (قيم عناصر الصف الجديد × نقطة ارتكاز الصف القديم) ويتم تطبيق هذه القاعدة في جميع المراحل .

يلاحظ أن الجدوالة الأخيرة إن كافة قيم الصف التقييمي (م ن – رن) هي صفر أو أكبر من الصفر (قيم موجبة) ويمكن وضع الحل الأمثل :

س ⟵ 3
ص ⟵ صفر

إجابة السؤال رقم (3) :



المسار الأول = أ ⟵ ب ⟵ د ⟵ و

المسار الثاني = أ ⟵ ج ⟵ وهمي ⟵ د ⟵ و

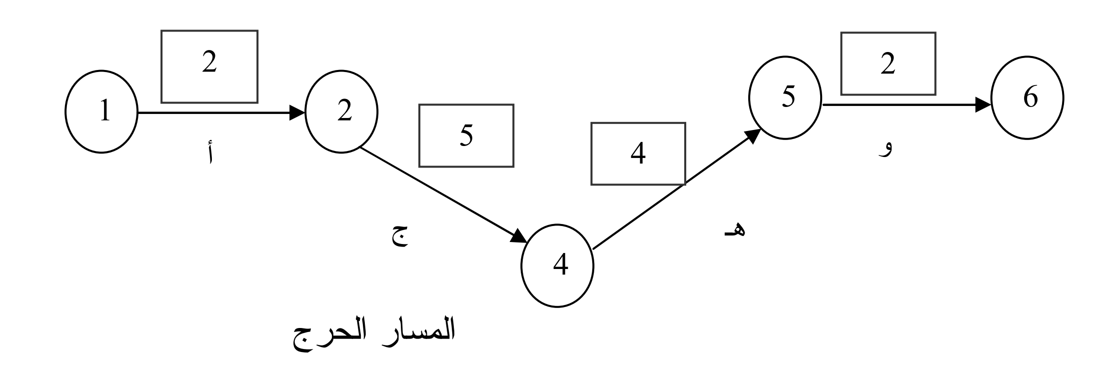
المسار الثالث = أ ⟵ ج ⟵ هـ ⟵ و

المسار الأول = 11 أسبوع

المسار الثاني = 12 أسبوع

المسار الثالث = 13 أسبوع

المسار الحرج هو أطول مسار والبالغ 13 أسبوعاً هو أ ←── ج ←── هـ ←── و



المسار الحرج

البداية المبكرة

المسار	النشاط	البداية المبكرة	النهاية المبكرة
2−1	أ	صفر	2
3−2	ب	2	6
4−2	ج	2	7
5−3	د	6	9
5−4	هـ	7	11
6−5	و	11	13

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى

الجامعـــة المفتـــوحة

أسئلة في مـادة بحوث العمليات

أجب عن أربع أسئلة فقط مما يأتي :

س1: إذا كانت دالة الهدف وقيود وشروط لشركة معينة هي كالآتي :

دالة الهدف 80 س +100 ص ⟵ يحقق أكبر قيمة ممكنة

المعادلة الأولى س +2 ص ≤ 720

المعادلة الثانية 5 س + 4 ص ≤ 1800

المعادلة الثالثة 3 س + ص ≤ 900

شرط عدم السلبية س،ص ≥ 0

المطلوب :

1- أوجد الحل الأمثل بواسطة استخدام طريقة التحليل البياني

2- هل يوجد هناك ساعات غير مستغلة وفي أية معادلة

س2: إذا توفرت لديك المعلومات المبينة في الجدول التالي :

القاعدة	$س_1$	$س_2$	$ص_1$	$ص_2$	كميات الحل
	3	4			
$ص_1$	1	2			80
$ص_2$	3	2			120

المطلوب :

1- اكتب المشكلة في صورة معادلات رياضية أولية تمثل التكوين النهائي للمشكلة .

2- أكمل الجدول السابق، ثم أوجد الحل الأمثل لهذه المشكلة بواسطة طريقة السيمبلكي (الطريقــة المبسطة)

س3: مشروع معين توفرت لديه المعلومات التالية :

الأنشطة	أ	ب	ج	د	و
الأنشطة السابقة لها	–	أ	أ	أ	ب د
الزمن	4	5	3	5	2

المطلوب :

1- ما المقصود بالأنشطة التخيلية المساعدة

2- بناء الشبكة البيانية وتحديد المسار الحرج

3- ما هو تأثير النشاط (د) لو أصبح الزمن 5 ساعات

س4: تحدث عن كل من :

1- مفهوم الأساليب الكمية

2- الأساليب الكمية وبناء النماذج

3- مراحل التحليل الكمي

س5: اكتب مذكرات مختصرة عن :

1- مشاكل النقل والنماذج المستخدمة لإيجاد الحل الأمثل

2- نظريات المباريات

إجابة مادة بحوث العمليات

إجابة السؤال رقم (1) :

دالة الهدف :

80 س + 100 ص ←——— تحقق أكبر قيمة ممكنة

القيود :

س + 2 ص ≥ 720 ←——— (1)

5 س + 4 ص ≥ 1800 ←——— (2)

3 س + ص ≥ 900 ←——— (3)

شروط عدم السلبية س،ص ≤ صفر

1- تحويل متباينات النموذج الرياضي إلى معادلات مكافئة بافتراض المساواة وبدون إضافة متغير إضافي :

دالة الهدف :

80 س + 100 ص ←——— تحقق أكبر قيمة ممكنة

القيود :

س + 2 ص = 720 ←——— (1)

5 س + 4 ص = 1800 ←——— (2)

3 س + ص = 900 ←——— (3)

س،ص ≤ صفر

2- نبدأ برسم مخطط بياني يتكون من محورين وكل محور يمثل المتغيرات الأساسية في اتخاذ القرار (س،ص) من خلال المخطط نصل إلى تحديد منطقة الحلول الممكنة وبما أن س،ص أكبر من أو تساوي صفر فإننا سنأخذ بعين الاعتبار فقط الحلول التي تحقق هذين المتغيران ومن أجل رسم خطوط معادلات النموذج يتطلب معرفة قيم هذين المتغيرين بدلالة إحداهما :

- رسم خط دالة القيد الأول :

س + 2 ص = 720 ←—— (1)

نفرض س = صفر

إذن ص = $\frac{720}{2}$ = 360 (صفر،360)

نفرض ص = صفر

إذن س = 720 (720،صفر)

– رسم خط دالة القيد الثاني :

5 س + 4 ص = 1800 ⟵ (1)

نفرض س = صفر

4 ص = 1800 (صفر،450)

إذن ص = $\frac{1800}{4}$ = 450

نفرض ص = صفر

5 س = 1800 (360،صفر)

إذن س = $\frac{1800}{5}$ = 360

– رسم خط دالة القيد الثالث :

3 س + ص = 900 ⟵ (3)

نفرض س = صفر

إذن ص = 900 (صفر،900)

نفرض أن ص = صفر

3 س = 900

إذن س = $\frac{900}{3}$ = 300 (300،صفر)

والآن يوجد لدينا ثلاثة مخططات وكلاً منهما يعطي حلاً ممكناً للمزيج الإنتاجي وفقاً إلى المحـــددات الثلاثة ولكي نصل إلى الحل الأمثل يتطلب رسم خطوط الدوال على مخطط بياني واحد من خلاله يـــتم تحديد منطقة الحلول الممكنة والشكل التالي يوضح ذلك من جدوالة المحددات السابقة :

القيود	الإحداثيات	
	س	ص
الأول	صفر 720	360 صفر
الثاني	صفر 360	450 صفر
الثالث	صفر 300	900 صفر

إن المنطقة المظللة الموضحة بالشكل البياني تحدد منطقة الحلول الممكنة وعلى حـــدودها أو بـــداخلها تعطي لكل من المتغيرات الأساسية (س،ص) قيم ومن خلال الرسم البياني يوجد قيم المتغيرات الأساسية (س،ص) في المنطقة (E،D،C،B،A) حيث أن جميع القيم معلومة عدا (D،C) وبالتالي يتطلب إيجادها

من الرسم أو رياضياً بإسقاط عمود على المحور الأفقي ومد مستقيم يقابل المحور العمودي وتحديد قيم (س،ص) .

ويمكن إيضاح طريقة إيجادها رياضياً :

أولاً : إيجاد حدود النقطة (C) وذلك بطرح المعادلة رقم (2) من المعادلة رقم(1) وضربها في معامل ثابت (2)

5 س + 4 ص = 1800 ⟵ (2)

بالطرح 2 س + 4 ص = 1440 ⟵ (1)

3 س = 360

س = $\frac{360}{3}$ = 120

بالتعويض في إحدى المعادلات السابقة لإيجاد قيمة (ص) عندما س = 120

5 س + 4 ص = 1800 ⟵ (2)

5 × 120 + 4 ص = 1800

600 + 4 ص = 1800

4 ص = 1800 − 600

4 ص = 1200

ص = $\frac{1200}{4}$ = 300

إذن حدود النقطة C = (120،300)

ثانياً : إيجاد حدود النقطة (D) بطرح المعادلة رقم (3) من المعادلة رقم (2) بحيث يتم ضرب المعادلة في معامل ثابت مقداره (4)

12 س + 4 ص = 3600

5 س + 4 ص = 1800 بالطرح

7 س = 1800

س = $\frac{1800}{7}$ = 257

بالتعويض عن قيمة (س) في إحدى المعادلات السابقة لإيجاد قيمة (ص) عندما س = 257

12 × 257 + 4 ص = 3600

3084 + 4 ص = 3600

4 ص = 3600 − 3084

4 ص = 516

ص = $\frac{516}{4}$ = 128



إذن حدود النقطة D هي (128،257)

ص

(صفر،900)

3س+ص=900

(صفر،450)

(صفر،360)

5س+4ص=1800

B

C

(300،120)

منطقة الحلول الممكنة

س +2ص = 720

D

(128،257)

(300،صفر)

E

(360،صفر)

(720،صفر)

س

A

900 850 800 750 700 650 600 550 500 450 400 350 300 250 200 150 100 50

50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700 750 800 850 900

وبالتالي يمكن تحديد حدود منطقة الحلول الممكنة في الجدول التالي :

حدود منطقة الحلول الممكنة	الإحداثيات (س،ص)
A	(صفر،صفر)
B	(صفر،360)
C	(120،300)
D	(257،128)
E	(300،صفر)

وبعد تحديد منطقة الحلول الممكنة وتحديد حدودها يستلزم الأمر تحديد الحل الأمثل الذي يحقق أهـداف دالة الهدف المذكور سابقاً وذلك من خلال الجدول التالي :

حدود منطقة الحلول الممكنة	إحداثيات منطقة الحلول الممكنة (س،ص)	دالة الهدف 80 س + 100 ص	قيمة دالة الهدف	
A	(0،0)	80(صفر) +100 (صفر)	صفر	
B	(صفر،360)	80(صفر) + 100(360)	36000	
C	(120،300)	80(120) + 100(300)	39600	أفضل إنتاج
D	(257،128)	80(257) + 100(128)	33360	
E	(300،صفر)	80(300) + 100(صفر)	24000	

من الجدول أعلاه يتضح بأن أقصى ربح يمكن أن تحققه الشركة هو (39600 د.ل) ويكـون المـزيج الإنتاجي اللازم لتحقيق هذا الربح هو إنتاج 120 وحدة من (س) وإنتاج 300 وحدة مـن (ص) وهـو المطلوب .

إجابة السؤال الثاني :

وضع المشكلة في صورة برمجة خطية (النموذج الرياضي)

دالة الهدف

3 $س_1$+ 4 $س_2$ ⟵ تحقق أكبر عائد ممكنة

القيود :

$س_1$ + 2 $س_2$ ≥ 80 ⟵ (1)

3 $س_1$ + 2 $س_2$ ≥ 120 ⟵ (2)

شروط عدم السلبية $س_1$،$س_2$ ≤ صفر

1- تحويل اللامتساويات إلى متساويات وذلك بإضافة المتغيرات العشوائية :

$س_1$ + 2 $س_2$ +$ص_1$ = 80 ⟵ (1)

3 $س_1$ + 2 $س_2$ +$ص_2$ = 120 ⟵ (2)

$س_1$،$س_2$،$ص_1$،$ص_2$ ≤ صفر

2- تعديل دالة الهدف :

3 $س_1$ + 4 $س_2$ + صفر $ص_1$ + صفر $ص_2$ ⟵ يحقق أكبر عائد ممكن

3- وضع المصفوفة الجدوالية كالآتي :

$س_1$	$س_2$	$ص_1$	$ص_2$		
1	2	1	0	=	80
3	2	0	1	=	120

الجدول المبدئي :

تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	$س_1$	$س_2$	$ص_1$	$ص_2$	
دالة الهدف م ن			3	4	صفر	صفر	
صفر	$ص_1$	80	1	2	1	0	الصف المغادر / 80/2=40
صفر	$ص_2$	120	3	2	0	1	120/2=60
رن		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	
م ن–رن			3	4	صفر	صفر	

العمود الأمثل ↑ ($س_2$)

الجدول الثاني :

دالة الهدف م ن			3	4	صفر	صفر	
تكلفة الوحدة	**المتغير الأساسي**	**قيمة المتغير**	س$_1$	س$_2$	ص$_1$	ص$_2$	
4	س$_2$	40	1/2	1	1/2	صفر	40/1/2=80
صفر	ص$_2$	40	2	صفر	1−	1	40/2=80 — الصف المغادر
رن		160	2	4	2	صفر	
م ن−رن			1	صفر	2−	صفر	

العمود الأمثل ↑ (س$_1$)

ملاحظات :

1− يمكن إيجاد الصف س$_2$ وذلك بقسمة قيم عناصر الصف على نقطة ارتكاز الصف وهي كالآتي :

عناصر الصف $\frac{80، 1، 2، 1، 0}{2}$

2− إيجاد عناصر الصف ص$_2$ وذلك بتطبيق القاعدة القانونية :

قيم عناصر الصف القديم − (قيم عناصر الصف الجديد × نقطة ارتكاز الصف القديم)

$120 - (2 \times 40) = 120 - 80 = 40$

$3 - (2 \times 1/2) = 3 - 1 = 2$

2 − (2 × 1) = 2 − 2 = صفر

$0 - (2 \times 1/2) = 0 - 1 = -1$

1 − (صفر × 2) = 1 − صفر = 1

الجدول الثالث :

دالة الهدف م ن			3	4	صفر	صفر
تكلفة الوحدة	**المتغير الأساسي**	**قيمة المتغير**	س$_1$	س$_2$	ص$_1$	ص$_2$
3	س$_1$	20	1	صفر	1/2−	1
4	س$_2$	30	صفر	1	3/4	1/2−
رن		180	3	4	3/2	1
م ن−رن			صفر	صفر	3/2−	1−

ملاحظات :

1- يمكن إيجاد الصف $س_1$ وذلك بقسمة قيم عناصر الصف على نقطة ارتكاز الصف وهي كالآتي :

عناصر الصف : 40، 2، صفر، -1، $\frac{1}{2}$

2- إيجاد عناصر الصف $س_2$ وذلك من القاعدة القانونية :

قيم عناصر الصف القديم $س_2$ – (قيم عناصر الصف الجديد ($س_1$) × نقطة ارتكاز الصف القديم $س_2$)

40 – (20 × 1/2) = 40 – 10 = 30

1/2 – (1 × 1/2) = 1/2 – 1/2 = صفر

1 – (صفر × 1/2) = 1 – صفر = 1

1/2 – (-1/2 × 1/2) = 1/2 + 1/4 = 3/4

صفر – (1 × 1/2) = صفر – 1/2 = -1/2

نلاحظ أن قيم عناصر الصف التقييمي (م ن – رن) أصبحت جميعها قيم صفرية وسالبة وهنا ليس إمكانية لتحسين الحل وهذا يمثل الحل الأمثل .

والمزيج الإنتاجي هو إنتاج (20) وحدة من السلفة الأولى $س_1$ وإنتاج (30) وحدة من السلفة الثانية $س_2$

$س_1$ ⟵ 20 وحدة

$س_2$ ⟵ 30 وحدة

بالتعويض في دالة الهدف :

3 $س_1$ +4 $س_2$

3 × 20 + 4 (30) = 180 د.ل

كما أن الطاقة المتاحة تم استغلالها بالكامل عند إنتاج الكميات المذكورة أعلاه من $س_1$،$ص_2$

القيد رقم $س_1$ + 2 $س_2$ = 180

20 + 2 × 30 = 80

الطاقة المتاحة – الطاقة المستغلة = (طاقة الفائض أو عجز في الطاقة)

80 – 80 = صفر

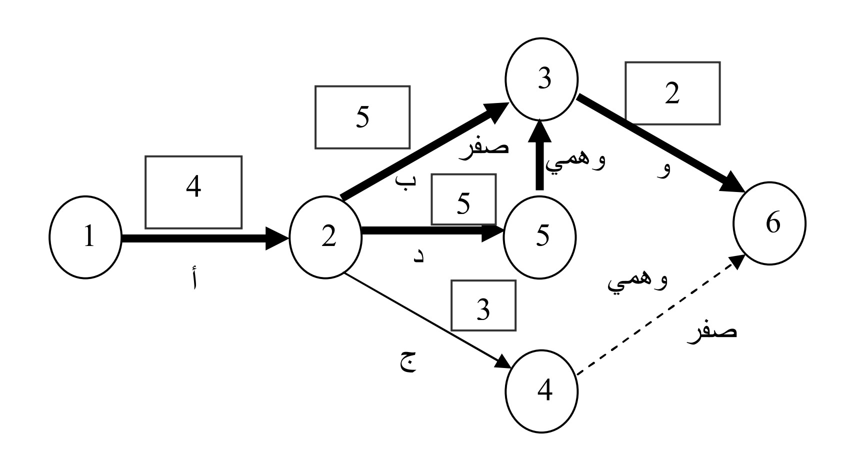
القيد الثاني 3 $س_1$ + 2 $س_2$ = 120

3 × 20 + 2 × 30 = 120

الطاقة المتاحة – الطاقة المستغلة = (طاقة الفائض أو عجز في الطاقة)

120 – 120 = صفر

2- بناء الشبكة البيانية :



المسارات :

أ ←—— ب ←—— و = 4 + 5 + 2 = 11

أ ←—— د ←—— وهمي ←—— و = 4 + 5 صفر + 2 = 11

أ ←—— ج ←—— وهمي = 4 + 3 + صفر = 7

المسار الحرج هما مساران :

المسار النشط أ ←—— ب ←—— و = 11

الثاني النشاط أ ←—— د ←—— وهمي ←—— و = 11

3- لو أصبح النشاط (د) زمنه (5) أسابيع فإنه لا يؤثر في المسارات الحرجة المذكورة أعلاه .

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى

الجامعـــة المفتـــوحة

أسئلة في مـادة بحوث العمليات

أجب عن أربع أسئلة فقط مما يأتي :

س1: تحدث عن الأنواع المختلفة للنماذج التي تستخدم في مجال بحوث العمليات مع ذكر أسئلة كلما أمكن ذلك .

س2: أوجد الحل الأمثل للنموذج أدناه باعتماد طريقة السيمبلكس

$س_1 + س_2$ ⟵ يحقق أقل كلفة ممكنة

القيود $س_1 \leq 30$

$س_2 \leq 20$

$س_1 + س_2 \leq 80$

شروط عدم السلبية $س_1، س_2 \leq 0$

س3: تحتاج مكتبة الجامعة المفتوحة لأربعة كتب مرجعية في تخصصات أربعة خلال السنة الدراسية القادمة، العدد المطلوب من هذه الكتب مبينة في الجدول التالي، وقد تقدمت ثلاثة دور نشر لتزويد الجامعة بهذه الكتب ولكن تحت الشروط والأسعار التالية، مع العلم بأن التوزيع المبدئي لعدد الكتب موزعة داخل المصفوفة :

الكتب / دور النشر	A	B	C	D	المجموع
X	3	2	3	7	15
Y	1	5	4	3	4
Z	3	4	4	6	2
	9	7	5	0	21 / 21

المطلوب : إيجاد الخطة الشرائية التي بشأنها جعل تكاليف الشراء أقل ما يمكن .

س4: مشروع لإنشاء مكتبة تعليمية يتضمن الأنشطة الآتية :

المسار	النشاط	الوقت
2−1	أ	2
3−1	ب	1
5−2	جـ	3
6−2	د	5
5−3	هـ	4
6−5	و	1
4−3	ز	3
7−4	س	2
8−5	ص	7
8−6	ع	6
8−7	م	1

المطلوب :

أ− بناء شبكة المشروع

ب− تحديد عدد المسارات والوقت اللازم بالأسابيع لكل مسار

ج− تحديد المسار الحرج وتحديد الوقت اللازم لإنجاز المشروع

س5: ناقش وبأسلوب علمي كل من :

منطقة الإنتاج، الحلول الأساسية، الحل الأمثل

إجابة مادة بحوث العمليات

إجابة السؤال الثاني :

دالة الهدف س$_1$ + س$_2$ ⟵ تحقق أقل كلفة ممكنة

القيود :

س$_1$ ≥ 30 ⟵ (1)

س$_2$ ≥ 20 ⟵ (2)

س$_1$ + س$_2$ ≥ 80 ⟵ (3)

شروط عدم السلبية س$_1$،س$_2$ ≥ صفر

1- تحويل اللامتساويات إلى متساويات وذلك بإضافة المتغيرات الاصطناعية وطرح المتغيرات العشوائية :

س$_1$ – ص$_1$ + ع$_1$ = 30 ⟵ (1)

س$_2$ – ص$_2$ +ع$_2$ = 20 ⟵ (2)

س$_1$ + س$_2$ –ص$_3$ +ع$_3$ = 80 ⟵ (3)

س$_1$،س$_2$،ص$_1$،ص$_2$،ص$_3$، ع$_1$، ع$_2$،ع$_3$ ≥ صفر

2- تعديل دالة الهدف مع تحديد قيمة المتغير الاصطناعي (م) حيث م = 10 وبالتالي تصبح دالة الهدف كالآتي :

س$_1$ + س$_2$ +0 ص$_1$+ 0 ص$_2$ + 0 ص$_3$ + م ع$_1$+م ع$_2$ + م ع$_3$ ⟵ تحقق أقل كلفة ممكنة

3- وضع النموذج السابق في شكل مصفوفة

س$_1$	س$_2$	ص$_1$	ص$_2$	ص$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$		
1	صفر	-1	صفر	صفر	1	صفر	صفر	=	30
صفر	1	صفر	-1	صفر	صفر	1	صفر		20
1	1	صفر	صفر	-1	صفر	صفر	1		80

الجدوالية الأولية :

دالة الهدف م ن			1	1	0	0	0	م	م	م
تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	$س_1$	$س_2$	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
م	$ع_1$	30	1	صفر	1−	صفر	صفر	1	صفر	صفر
م	$ع_2$	20	صفر	1	صفر	1−	صفر	صفر	1	صفر
م	$ع_3$	80	1	1	صفر	صفر	1−	صفر	صفر	1
ر ن		130م	2م	2م	−م	−م	−م	م	م	م
م ن−ر ن			1−2م	1−2م	+م	+م	+م	صفر	صفر	صفر
الصف التقييمي على اعتبار م=10			19−	19−	10	10	10	صفر	صفر	صفر

00=0/30
20=1/20
80=1/80

العمود الأمثل يمثل أكبر قيمة سالبة

الجدول الأول :

دالة الهدف م ن			1	1	صفر	صفر	صفر	10	10	10
تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	$س_1$	$س_2$	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
1	$س_2$	20	صفر	1	صفر	1−	صفر	صفر	1	صفر
10	$ع_1$	30	1	صفر	1−	صفر	صفر	1	صفر	صفر
10	$ع_3$	60	1	صفر	صفر	1+	1−	صفر	1−	1
ر ن		920	20	1	10−	9	10−	10	9−	10
م ن−ر ن			19−	صفر	10+	9−	10+	صفر	19	صفر

00=0/20
30=1/30
60=1/60

العمود الأمثل

الجدول الثاني :

دالة الهدف م ن			1	1	صفر	صفر	صفر	10	10	10
تكلفة الوحدة	المتغير الأساسي	قيمة المتغير	$س_1$	$س_2$	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
1	$س_1$	30	1	صفر	1−	صفر	صفر	1	صفر	صفر
1	$س_2$	20	صفر	1	صفر	1−	صفر	صفر	1	صفر
10	$ع_3$	30	صفر	صفر	1	1	1−	1−	1−	1
ر ن		350	1	1	9	9	10−	9−	9−	10
م ن−ر ن			صفر	صفر	9−	9−	10+	19	19	صفر

30−=1−/30
00=0/20
30=1/30

العمود الأمثل

الجدول الثالث :

دالة الهدف م ن			1	1	صفر	صفر	صفر	10	10	10
تكلفة الوحدة	**المتغير الأساسي**	**قيمة المتغير**	س$_1$	س$_2$	ص$_1$	ص$_2$	ص$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
صفر	ص$_1$	30	صفر	صفر	1	1	1−	1−	1−	1
1	س$_1$	60	1	صفر	صفر	1	1−	صفر	1−	1
1	س$_2$	20	صفر	1	صفر	1−	صفر	صفر	1	صفر
رن		80	1	1	صفر	صفر	1−	صفر	صفر	1
م ن−ر ن			صفر	صفر	صفر	صفر	1+	10	10	9

يلاحظ من الجدول الثالث أعلاه أن كافة قيم صف التقييم (م ن – رن) هي صفرية أو أكبر من صـــفر (قيم موجبة) ويمكن وضع الحل الأمثل بالشكل التالي :

س$_1$ ⟵ 60

س$_2$ ⟵ 20

ص$_1$ ⟵ 30

كما أنه في حالة إيجاد قيم الصفوف في كافة الجداول يتطلب تطبيق القاعدة القانونية وهي :

قيم عناصر الصف القديم – (قيم عناصر الصف الجديد × نقطة ارتكاز الصف القديم)

إجابة السؤال الثالث :

الكتب / دور النشر	A	B	C	D	المجموع	
X	3 / 3	2 / 7	3 / 5	7 / +7	15	$U_1=0$
Y	1 / 4	5 / +5	4 / +3	3 / +5	4	$U_2=-2$
Z	3 / 2	4 / +2	4 / +1	6 / +6	2	$U_3=0$
	9	7	5	–	21 / 21	

$V_1 = 3 \quad V_2 = 2 \quad V_3 = 3 \quad V_4 = 0$

تكلفة الشراء = $(3\times3) + (7\times2) + (5\times3) + (4\times1) + (2\times3)$

$= (9) + (14) + (15) + (4) + (6)$

$= 48$

وحتى نختبر أن الحل هو الحل الأمثل وحتى تكون مثالية :

1– نحدد المتغيرات الأساسية من غير الأساسية من جدول الحل المبدئي :

المتغيرات الأساسية	المتغيرات الغير الأساسية
C_{11}	C_{14}
C_{12}	C_{22}
C_{13}	C_{23}
C_{12}	C_{24}
C_{13}	C_{32}
	C_{33}
	C_{34}

2– نختار متغيرات لحساب التكلفة غير المباشرة هي Vj،Vi باستخدام علاقة المباشرة المتمثلة بالعلاقة التالية :

$$Cij = Ui + Vj$$

$C_{11} = U_1 + V_1 \longrightarrow 3 = 0 + V_1 \longrightarrow V_1 = 3$

$C_{12} = U_1 + V_2 \longrightarrow 2 = 0 + V_2 \longrightarrow V_2 = 2$

$C_{13} = U_1 + V_3 \longrightarrow 3 = 0 + V_3 \longrightarrow V_3 = 3$

$C_{21} = U_2 + V_1 \longrightarrow 1 = U_2 + 3 \longrightarrow U_2 = -2$

$C_{31} = U_3 + V_1 \longrightarrow 3 = U_3 + 3 \longrightarrow U_3 = 0$

3− احتساب متغيرات التكلفة الغير مباشرة للخلايا غير المملؤه :

$E_{14} = C_{14} - U_1 - V_4 \longrightarrow 7 - 0 - 0 = 7$

$E_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 \longrightarrow 5 + 2 - 2 = 5$

$E_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 \longrightarrow 4 + 2 - 3 = 3$

$E_{24} = C_{24} - U_2 - V_4 \longrightarrow 3 + 2 - 0 = 5$

$E_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 \longrightarrow 4 - 0 - 2 = 2$

$E_{33} = C_{33} - U_3 - V_3 \longrightarrow 4 - 0 - 3 = 1$

$E_{34} = C_{34} - U_3 - V_4 \longrightarrow 6 - 0 - 0 = 6$

4− نكون مصفوفة التكلفة الغير مباشرة وهي كالأتي :

$V_1 = 3 \quad V_2 = 2 \quad V_3 = 3 \quad V_4 = 0$

$$\begin{matrix} U_1 = 0 \\ U_2 = -2 \\ U_3 = 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2- \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

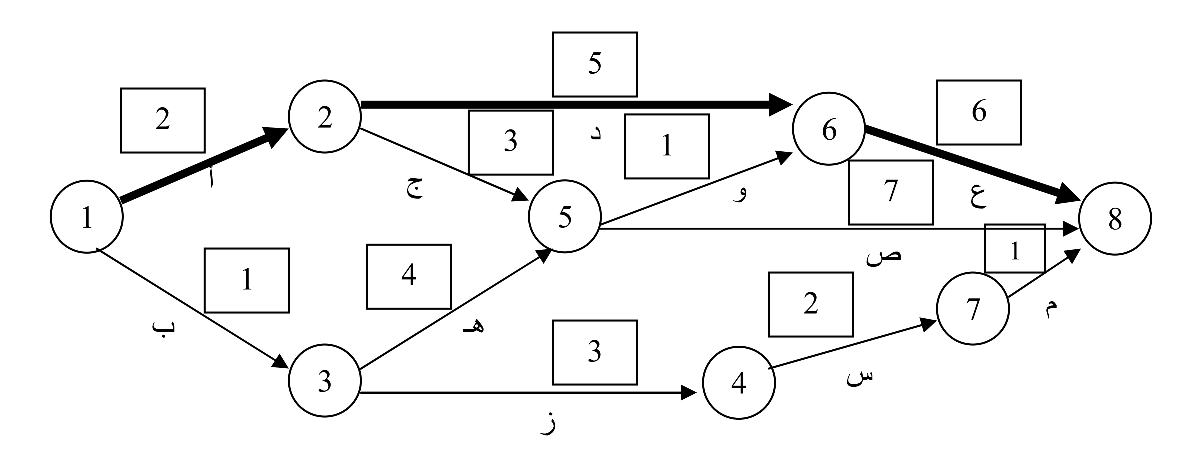
5− نحدد مصفوفة الفرق بين مصفوفة التكلفة المباشرة ومصفوفة التكلفة الغير مباشرة:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & -5 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

وطالما أن جميع عناصر مصفوفة الفرق كلها أصفار أو قيم سالبة فإن التكلفة السابقة تمثل الحل الأمثل للمشكلة وبالتالي فإن التكلفة الشراء تعبر عن أقل كلفة ممكنة وهي (48).

إجابة السؤال الرابع :

أ)



ب)

المسار الأول :

8 – 6 ← 6 – 2 ← 2– 1

أ ← د ← ع

13 = 6 + 5 + 2

المسار الثاني :

8 – 6 ← 6 – 5 ← 5 – 2 ← 2–1

أ ← ج ← و ← ع

12 = 6 + 1 + 3 + 2

المسار الثالث :

8 – 5 ← 5 – 2 ← 2 – 1

أ ← ج ← ص

12 = 7 + 3 + 2

المسار الرابع :

8 – 6 ← 6 – 5 ← 5 – 3 ← 3 – 1

ب ← هـ ← و ← ع

12 = 6 + 1 + 4 + 1

المسار الخامس :

1 – 3 ⟵ 3 – 5 ⟵ 5 – 8

ب ⟵ هـ ⟵ ص

1 + 4 + 7 = 12

المسار السادس :

1 – 3 ⟵ 3 – 4 ⟵ 4 – 7 ⟵ 7 – 8

ب ⟵ ز ⟵ س ⟵ م

1 + 3 + 2 + 1 = 7

ج) المسار الحرج هو أطول المسارات ويمثل المسار الأول وقته 13 أسبوعاً ويشير له بالرمز ⟵